LA COMPRENSIÓN DE LA PARÁBOLA A TRAVÉS DE LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

LUIS EDUARDO SÁNCHEZ ESPINEL

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

FACULTAD CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

ESCUELA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

TUNJA

2019

LA COMPRENSIÓN DE LA PARÁBOLA A TRAVÉS DE LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

LUIS EDUARDO SÁNCHEZ ESPINEL

Trabajo de grado, requisito parcial para optar el título de Magister en Educación Matemática.

Director Dr. ZAGALO ENRIQUE SUÁREZ AGUILAR

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

FACULTAD CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

ESCUELA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

TUNJA

2019

RESUMEN

La investigación sobre la comprensión del objeto matemático parábola se realizó con un enfoque teórico de las representaciones semióticas, teniendo en cuenta las dificultades que presentan los estudiantes del grado décimo en el aprendizaje de este concepto.

Para esto, se plantearon estrategias de enseñanza encaminadas al trabajo en los registros gráfico, verbal y algebraico y sus transformaciones, conversión y tratamiento; promoviendo el reconocimiento, interpretación e interiorización de este objeto.

El tipo de investigación es cualitativa con el propósito de describir e interpretar la comprensión de los estudiantes acerca de la parábola. Para su desarrollo se plantearon tres etapas: 1) preparatoria o planeamiento; 2) acción y observación; y 3) analítica.

Los resultados obtenidos están asociados con el análisis del desempeño de los estudiantes al realizar actividades de tratamiento y conversión en los diferentes registros de representación; determinando niveles de comprensión de la parábola según el enfoque teórico y metodológico.

ABSTRACT

The research on the understanding of the parabola mathematical object was carried out with a theoretical approach to semiotic representations, taking into account the difficulties that students of the tenth grade present in learning this concept.

For this, teaching strategies aimed at work in graphic, verbal and algebraic records and their transformations, conversion and treatment were proposed; promoting the recognition, interpretation and internalization of this object.

The type of research is qualitative with the purpose of describing and interpreting students' understanding of the parable. Three stages were proposed for its development: 1) preparatory or planning; 2) action and observation; and 3) analytical.

The results obtained are associated with the analysis of student performance when carrying out treatment and conversion activities in the different representation records; determining levels of understanding of the parable according to the theoretical and methodological approach.

Contenido

Índice de tablas

Introducción

El Ministerio de Educación Nacional a través de los estándares básicos de competencias plantea subprocesos que el estudiante debe cumplir para alcanzar el desarrollo de los pensamientos matemáticos, así mismo estipula el estudio de las cónicas en el área de matemáticas para el grado décimo, donde se establece que el estudiante debe analizar expresiones algebraicas de estas secciones y describir las curvas que se obtienen al realizar cortes longitudinales y transversales en un cono y en un cilindro (MEN, 2006).

En el estudio de las secciones cónicas se encuentra el objeto matemático parábola, donde el estudiante debe interpretar y comprender este objeto, pero en la enseñanza de la parábola los estudiantes presentan dificultades para comprensión, tal como lo menciona Alonso (2013): los estudiantes se les dificulta reconocer la parábola a partir de sus componentes y no establecen una relación entre las ecuaciones de esta con sus elementos; por esto es necesario diseñar y aplicar estrategias que ayuden a superarlas, de ahí surge esta investigación.

En el documento se presenta el desarrollo de la investigación y comprende los siguientes capítulos: 1) se da a conocer el planteamiento del problema, la justificación y los objetivos; 2) se describen algunas investigaciones que trabajaron esta temática; 3) el marco teórico que sustenta la investigación; 4) la metodología y las etapas que permitieron lograr los objetivo; 5) el análisis de la información y en el 6) las conclusiones y perspectivas futuras.

En los resultados de la investigación se establecen los niveles de comprensión del objeto matemático parábola, según el enfoque de la teoría de las representaciones semióticas, basados en el análisis de dichas representaciones (transformación, tratamiento y conversión).

1. Planteamiento del problema

1.1 Descripción del problema

En el contexto colombiano, bajo las directrices del Ministerio de Educación Nacional (MEN) se establecen Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) y Lineamentos Curriculares (MEN, 1998), los cuales se constituyen en parámetros para determinar lo que los estudiantes deben saber y hacer en las diferentes áreas y grados; así como también estipulan perspectivas metodológicas, procesos y contextos que deben privilegiarse en la enseñanza.

En el área de matemática, estas directrices contemplan diversos procesos generales (comunicar, razonar, formular, comparar, modelar fenómenos de la realidad, resolver problemas y ejercitar procedimientos y algoritmos) y tipos de pensamiento matemático (numérico, espacial, métrico o de medida, aleatorio o probabilístico y variacional) encaminados a fortalecer el desarrollo de competencias matemáticas.

Ser matemáticamente competente implica desde estos lineamientos ser activo, eficiente, diestro y hábil en el desarrollo de cada uno de los procesos, en los cuales los estudiantes van pasando por diferentes niveles de competencia; a medida que los estudiantes van ascendiendo en la Educación Básica y Media, van desarrollando procesos de mayor complejidad y tendrán la capacidad de afrontar situaciones de mayor nivel de abstracción, es por esto que en los estándares se establecen niveles de competencia para cada uno de los tipos de pensamiento matemático y para cada conjunto de grados (primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a undécimo).

Los estudiantes en el grado décimo a undécimo deben utilizar diferentes registros de representación para construir, expresar, declarar y representar ideas matemáticas es decir, deben estar en la capacidad de dominar las distintas representaciones empleadas en el lenguaje matemático, además los estudiantes deben identificar de forma visual, gráfica y algebraica las relaciones entre los cambios de registros de lugares geométricos, analizar la relación entre las expresiones algebraicas y gráficas de funciones, reconocer y describir curvas obtenidas por cortes longitudinales y transversales en un cono y en un cilindro (MEN, 2006).

No obstante, la realidad que se evidencia en el aula parece distanciarse de lo planteado en los estándares básicos de competencia, por ejemplo, los estudiantes presentan dificultades en la comprensión de lugares geométricos, tal es el caso para el objeto matemático parábola, el desempeño de los estudiantes se centra en el desarrollo de procesos algorítmicos y mecánicos; esta problemática radica en la falta de interpretación y comprensión de este objeto. Mesa, Aldana y Alonso (2013) afirman:

> (…) los estudiantes no reconocen la parábola a partir de sus componentes y por tanto no hay relación analítica de la ecuación con los elementos que la conforman, es decir, no logran integrar la razón que existe entre el vértice, la directriz y el foco, confunden la simetría con el eje focal y la orientación del objeto; tienen dificultad para utilizar los sistemas de representación que facilitan la interpretación de la parábola; porque no asocian la ecuación con la gráfica, ni establecen una relación tabular con su gráfica (p. 75).

De igual forma, lo observado en la práctica pedagógica de la enseñanza del objeto matemático parábola, a los estudiantes se les dificulta reconocer la ecuación de la parábola, escribir la ecuación canónica, graficar una parábola a partir de su ecuación, resolver problemas de aplicación, describir los elementos de la parábola a partir de su ecuación y su gráfica, realizar la conversión en cada uno de los registros: gráfico, analítico algebraico y verbal, para así comprender este objeto matemático, se les dificulta trabajar en cada registro y pasar de un registro a otro.

La movilidad de los tratamientos en cada uno de los registros o de registro en registro facilita la comprensión del objeto matemático abordado es decir, la conversión de representaciones de un sistema en diferentes registros permite la interpretación e interiorización de dicho objeto, pero muchos alumnos no llegan a comprender un objeto matemático, esto se da porque las situaciones planteadas no permiten trabajar en todas los posibles registros, la diversidad de representaciones no son abordadas en el mismo registro, o bien no hay una conversión entre las diferentes representaciones del objeto matemático (González, 2011).

De igual forma, el trabajo con las representaciones semióticas es importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matematicas debido a que se pueden abordar conceptos matemáticos en diferentes registros, pero este trabajo no es usual para los estudiantes y es allí donde presentan mayor dificultad para la comprensión de la matemática, por tal razón es necesario hacer uso de la teoría de las representaciones semióticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje enfocado al objeto matemático parábola.

Bajo los argumentos expuestos se planteó la pregunta de investigación:

¿Cómo caracterizar los niveles de comprensión del objeto matemático parábola a partir de las diversas representaciones semióticas en los estudiantes de grado décimo del Colegio la Presentación Tunja?

1.2 Justificación

En la enseñanza de las secciones cónicas, los estudiantes presentan diferentes dificultades para su interpretación, específicamente con la parábola. Cuando se trabaja en la interpretación de este objeto matemático los estudiantes tienden a desarrollar procesos algebraicos y memorísticos, lo cual limita el desarrollo de habilidades matemáticas como: comprender, interpretar, visualizar y comunicar (Fernández, 2011). En el mismo sentido, López, Aldana, y Alonso (2013), mencionan que los estudiantes utilizan la memorización de pasos, procedimientos y procesos que allí se desarrollan, y es por esto que presentan dificultades para la interiorización del concepto, dado que, carece de sentido y significado lo desarrollado en la clase.

Así mismo, López y Aldana (2012), argumentan que los estudiantes presentan dificultades en interpretar gráficas, encontrar los elementos de la parábola a partir de su ecuación, coordinar los diferentes modos de representación e interpretar la definición de este lugar geométrico. De igual modo, Ruiz (2013), expone que los estudiantes presentan dificultad de tipo algebraico en hallar la ecuación canónica y general de este objeto, como también en la construcción del concepto. Son varias las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la parábola, esto se da porque la enseñanza de la parábola está centrada de manera algebraica, artificial, tradicional o de la misma forma como es planteada en los diferentes textos (Lara, 2016).

Ante estas dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la parábola, es importante generar situaciones de enseñanza que les permita, describir, construir y expresar de forma gráfica, verbal y algebraica las representaciones de este objeto; por ende, para el estudio de la parábola es fundamental incluir la teoría de las representaciones semióticas ya que este objeto es intangible para los estudiantes.

Por otro lado, como las dificultades en el área de matemáticas correspondientes a la propuesta van encaminadas a fenómenos de cambio; al utilizar las diversas representaciones semióticas en el aprendizaje de la parábola posiblemente les permitirá a los estudiantes construir sistemas de expresión, forma y comunicación de conocimiento matemático, incluyendo diferentes formas de escritura, notación y representación (Tamayo, 2006).

Con el uso de los diferentes registros de las representaciones semióticas en el aprendizaje del objeto matemático parábola, se pretende contribuir a la construcción de modelos de enseñanza que permitan la interpretación de este objeto. Sin embargo, con esta investigación no se pretende solucionar la problemática, sino hacer un aporte para el profesor en la enseñanza de la parábola, dándole posibles herramientas útiles para que los estudiantes logren su interpretación.

Se percibe que hay un vació en el trabajo práctico del aula al trabajar el objeto parábola debido a que los estudiantes presentan algunas concepciones erróneas en la interpretación de este objeto y posibles errores en la solución de diversas tareas, así mismo se evidencia que poseen desconocimiento de algunas características y propiedades fundamentales de la parábola, por tal razón lo que se pretende es que los estudiantes realicen una coordinación entre los diferentes registros de representación (algebraico, verbal y gráfico), permitiéndoles así el estudio, reconocimiento, interpretación e interiorización de este objeto, lo cual puede generar el desarrollo de competencias matemáticas. Al desarrollar competencias matemáticas, los estudiantes pueden ser más activos, eficientes, hábiles y diestros en el desarrollo de procesos de comunicación, razonamiento, formulación, modelación, ejercitación de procedimientos y resolución de problemas.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Establecer niveles de comprensión del objeto matemático parábola a través del análisis de representaciones semióticas, tratamientos y conversiones.

1.3.2 Objetivo específicos

Establecer los elementos matemáticos que configuran el objeto parábola a través de un estudio histórico y epistemológico.

Analizar las representaciones semióticas del objeto matemático parábola que promuevan su compresión.

Diseñar e implementar estrategias de enseñanza que permitan representar el objeto matemático parábola en los diferentes registros.

Identificar el reconocimiento de los elementos, propiedades y características de la parábola, que hacen los estudiantes a través de actividades con representaciones.

2. Marco referencial

2.1 Antecedentes

En este apartado se expone una síntesis sobre cómo ha sido estudiada y abordada la comprensión del objeto matemático parábola, desde de la teoría de las representaciones semióticas, desde el reconocimiento de las dificultades en el aprendizaje de este objeto y de la identificación de tendencias para afrontar su comprensión. Estos referentes, servirán como base conceptual para establecer los posibles aportes para abordar la problemática propuesta, y se presentan siguiendo criterios inicialmente en contextos internacionales y posteriormente nacionales.

A nivel internacional, frente al uso de la teoría de las representaciones semióticas en el aprendizaje, Lara (2016) analizó cómo los profesores de matemáticas movilizan la noción de parábola al desarrollar una secuencia didáctica utilizando diferentes registros de representación semiótica. Se utilizó como metodología la investigación cualitativa y como método la ingeniería didáctica. Desde esta perspectiva, identificó los diferentes tipos de registros utilizados por los docentes en la movilización de esta noción, señalando las dificultades en la conversión del registro gráfico al registro algebraico y las asociadas al trabajo en el registro de lenguaje común. Concluyó que los profesores coordinan con mayor facilidad el registro figural de representaciones con el registro de leguaje común.

En la perspectiva citada, Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen y Gorrochategui (2012) presentan una reflexión teórica sobre el rol que desempeña el uso de los registros de representación semiótica en el aprendizaje de la matemática, resaltando la importancia de utilizar más de un registro de representación. Exponen que el trabajo con los diferentes registros de representación semiótica no es usual para los estudiantes y es allí donde se presentan dificultades para el aprendizaje de las matemáticas; así mismo, señalan que en los libros de texto predominan ejercicios de tipo algebraico y algunos de tipo numérico y geométrico, trayendo como consecuencia una visión parcial de la temática. Recomiendan que los docentes deben trabajar en los diferentes tipos de registros y sus representaciones; es decir, en el tratamiento de cada registro y en la conversión de un registro a otro.

El uso de diferentes representaciones también fue abordado por De Alba, Mederos y Mayén (2010) en su investigación. En esta se propició la participación de los estudiantes de bachillerato en actividades didácticas dirigidas a la formación del concepto parábola a través de la vía genética y diferentes registros de representación. Utilizaron como metodología la organización del conocimiento escolar y el diseño de actividades didácticas para el aprendizaje activo y mediado de los estudiantes. Desde este punto de vista, las actividades didácticas estaban dirigidas a la utilización de diferentes registros de representación para la solución de problemas y a la transformación de información matemática obtenida de los registros gráfico y algebraico en comunicación verbal. Encontraron que dicha perspectiva favorece la formación del concepto.

Asi mismo, Tocto (2015) en su investigación sobre comprensión de la noción función cuadrática por medio del tránsito de registros de representación semiótica en estudiantes de quinto año de secundaria, señala que los estudiantes presentan dificultad para explicar y describir los elementos de la función cuadrática en el registro verbal. Utiliza la investigación el enfoque metodológico cualitativo de la ingeniería didáctica. En las conclusiones sobre este estudio describe la importancia de transitar por los diferentes registros de representación semiótica y las dificultades que presentan los estudiantes en las actividades cognitivas tratamiento y conversiones.

Respecto al reconocimiento de las dificultades en la comprensión del objeto matemático parábola, Gaitán, Lacayo y Flores (2014), en su investigación con un enfoque cualitativo y con la participación de 10 estudiantes de grado undécimo y docentes de matemáticas, señalan que estas, están asociadas con las actividades y estrategias utilizadas por los docentes en la enseñanza de este objeto y a su no pertinencia durante el desarrollo de cada sesión. Otras dificultades están asociadas, a la falta de claridad conceptual por parte de los estudiantes y a la interpretación y comunicación que hacen frente a la instrucción matemática dada por el docente. Además, concluyeron que las representaciones realizadas por los estudiantes influyen en la comprensión de los objetos matemáticos estudiados en clase y que los niveles de comprensión están relacionados con las diferentes experiencias realizadas en el medio.

En cuanto a, las estrategias utilizadas para la comprensión del objeto parábola, León (2016) en su investigación presenta algunas actividades sobre la incidencia de las construcciones geométricas en la génesis instrumental de la parábola, cuyo objetivo fue analizar cómo los estudiantes dirigen sus acciones a la resolución de problemas con diversas actividades geométricas y cómo estas contribuyen al proceso de aprendizaje de contenidos geométricos con el uso del Geogebra. Utilizó como metodología la ingeniería didáctica con un carácter experimental y un análisis a priori. Encontró que las construcciones geométricas de la parábola permitieron desarrollar habilidades sobre otros elementos geométricos, además que las acciones realizadas por los estudiantes permitieron encontrar esquemas de utilización que construyeron y movilizaron mientras trabajaban con la condición geométrica de la parábola.

En la perspectiva mencionada, De la Rosa (s.f) en su investigación, plantea una propuesta didáctica para abordar el objeto parábola haciendo uso de Geogebra, con estudiantes de secundaria. En su trabajo planteó una serie de etapas para el desarrollo de las actividades, como primera instancia, planeó: el reconocimiento del objeto parábola desde lo geométrico, la identificación de las propiedades y la construcción de la misma utilizando un sistema de coordenadas. Con la ayuda del software diseñó actividades que les permitió a los estudiantes construir la parábola, su definición e identificar las características de estas. Concluye así, que el uso de un procesador geométrico como Geogebra, el cual es un software libre, promueve la comprensión de conceptos matemáticos, permitiendo así que los estudiantes interactúen en el desarrollo de actividades en un entorno Web. Así mismo, recomienda a los docentes involucrar diferentes softwares en el desarrollo de actividades matemáticas.

A nivel nacional, frente al uso de la teoría de las representaciones semióticas en el aprendizaje, González (2011), en su investigación, describió el tratamiento de las representaciones semióticas de la función cuadrática que realizan los estudiantes de grado noveno del Instituto Agropecuario Veracruz. Utilizó una metodología descriptiva donde sustenta las dificultades en el tratamiento de las representaciones semióticas de la función cuadrática. Como producto de esta investigación concluye, que los estudiantes que han desarrollado la coordinación entre los diferentes registros de representación, pueden desempeñarse solo con la representación de un solo registro. La coordinación entre estos, les permitió a los estudiantes tener estrategias heurísticas en el desarrollo de actividades cognitivas. Además, recomienda a los docentes incluir actividades que le permitan al estudiante trabajar en cada uno de los registros de las representaciones semióticas de la función cuadrática, para lograr coordinación entre estos.

En el mismo aspecto, Beltrán (2016), describe cómo una intervención pedagógica fundamentada en la teoría de las representaciones semióticas ayuda a mejorar la comprensión del objeto matemático parábola. Empleó una investigación con enfoque metodológico cualitativo y un diseño de investigación acción, fue desarrollada con la participación de estudiantes de grado décimo. Concluyó que a medida que los estudiantes iban desarrollando las actividades enfocadas a la teoría de las representaciones semióticas comprendían el concepto parábola, además, que realizaron de forma adecuada los tratamientos en el interior de cada registro y la conversión de un registro a otro. Así mismo, señala que es importante que los estudiantes y los docentes conozcan y hagan uso los registros de representación semiótica, en tratamiento en el interior de cada registro y la conversión entre estos.

En cuanto al reconocimiento de las dificultades en la comprensión del objeto matemático parábola, López y Aldana (2012), analizaron cómo los estudiantes llegan a la comprensión del concepto de parábola. La metodología utilizada para este estudio fue cualitativa interpretativa apoyada en la ingeniería didáctica; participó un grupo de 25 estudiantes de ingeniería de sistemas de primer semestre; encontraron que algunas dificultades para su comprensión son: la interpretación de gráficas, encontrar los elementos para relacionarlos con la ecuación canónica y coordinar los diferentes modos de representación del objeto matemático. Concluyeron, que los estudiantes tienen inconvenientes en establecer una coordinación entre los registros de representación gráfico y algebraico, no comprenden el objeto matemático parábola debido a las nociones débiles que poseen sobre este objeto y no coordinan los procesos analíticos que los lleven a argumentar de manera lógica su desempeño.

En cuanto a, las estrategias utilizadas para la comprensión del objeto parábola, Pérez (2011), en su trabajo, diseñó y validó guías didácticas para la comprobación de las propiedades y construcciones de las cónicas, con el fin de aportar al proceso de enseñanza y aprendizaje de estas, donde el estudiante manipula material didáctico para determinar las definiciones de estos objetos y comprobar las propiedades y construcciones de las cónicas.

Asi mismo, Moncayo, Pantoja y Fernández (2012), en su investigación, plantearon una propuesta didáctica apoyada en el uso e integración del ambiente geométrico Cabri Géomètre II Plus, con el fin de promover la comprensión del objeto parábola. Utilizaron como metodología, la sistematización, ingeniería didáctica, análisis preliminares, planeación del estudio y diseño de actividades. Concluyeron, que gracias a las situaciones planteadas los estudiantes interactuaron con relaciones geométricas y otros conceptos.

El análisis de estos trabajos de investigación permitió conocer las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje del objeto matemático parábola, además, reconocer la importancia de la utilización de actividades orientadas al uso de los diferentes registros de la teoría de representación semiótica en la enseñanza de objetos matemáticos e identificar las diferentes estrategias que se emplean en esta teoría.

Con el aporte de estas investigaciones se crearon diferentes estrategias de enseñanza del objeto matemático parábola, de tal forma que los estudiantes pudieron trabajar en los distintos registros de representación (verbal, gráfico y algebraico) y en la conversión entre estos, permitiendo así el estudio, reconocimiento, interpretación e interiorización de este objeto; así mismo, dieron las pautas para la creación de los instrumentos para la recolección de la información.

3. Marco teórico

Esta investigación está fundamentada en la teoría de las representaciones semióticas, como un enfoque en la didáctica de la matemática, para producir nuevo conocimiento y no solo para la comunicación de cualquier representación mental, además, que el perfeccionamiento de las representaciones semióticas fue una condición esencial para el desarrollo del pensamiento matemático y constituye el único medio de acceso a los objetos matemáticos (Duval y Saenz, 2016).

A continuación, se aborda la definición de las representaciones semióticas, la semiosis y la noética, los tipos de transformación de representaciones semióticas, los tipos de registros, las formas de representación y la importancia de esta teoría, así mismo se presenta un análisis teórico del objeto matemático parábola, con el fin de analizar e identificar las diferentes formas de representación de la parábola, diseñar estrategias de enseñanza basadas en las actividades de tratamiento y conversión entre los diferentes registros para la comprensión de la parábola.

3.1 Las representaciones semióticas

Las representaciones se consideran como un conjunto de signos o símbolos producidos por reglas para describir procesos, sistemas y fenómenos, generando nuevas estructuras cognitivas, por consiguiente, la ampliación del conocimiento (Duval, 2002).

En el área de las matemáticas el enfoque de las representaciones semióticas se utiliza en trabajos sobre la adquisición de los conocimientos y sobre los problemas en su aprendizaje. Las representaciones son relativas a un sistema particular de signos, como el lenguaje, escritura algebraica o gráficas, las cuales pueden ser convertidas en otras representaciones equivalentes en otro *sistema semiótico*[1].

Las representaciones semióticas dependen primordialmente de las representaciones mentales y son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática (Duval,1999). De igual forma Duval (1996) expone que una representación semiótica se puede definir como el conjunto signo y objeto.

3.1.1 Semiótica y noética

Para Duval (1999), la semiosis es considerada como "la aprehensión o la producción de una representación semiótica y la noesis son aquellos actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto" (p.14).

D'Amore, Fandiño y Iori (2013) exponen que en matemáticas, para la adquisición conceptual de un objeto es necesario poseer una o más representaciones semióticas, para lo cual es fundamental la noética, entendida como la adquisición, comprensión y construcción conceptual, algorítmica, estratégica, comunicativa y semiótica de un objeto matemático. "No existe noética sin semiótica, y no existe un aprendizaje conceptual, algorítmico, estratégico o comunicativo sin aprendizaje semiótico" (p.130).

En el aprendizaje es importante investigar sobre la organización de las representaciones semióticas y los cambios de registros que realizan los alumnos en una clase, una parte fundamental en la didáctica de la matemática es cómo los estudiantes adquieren y se apropian de los conceptos matemáticos a lo que se le denomina noética; "no hay noética sin semiótica, es la semiótica la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noética" (Oviedo y Knashiro, 2012,

[1] Duval (2006) define un sistema semiótico como un conjunto de reglas para combinar signos en expresiones o unidades figurales.

p.31). Para que haya un aprendizaje es necesario que los estudiantes hagan uso de diferentes sistemas de representación semiótica y realicen la conversión en distintos registros (Oviedo y Knashiro, 2012).

Según Duval (citado por D'Amore, 2004), existen dos características fuertes para la adquisición conceptual de un objeto matemático, 1) el uso de más registros de representación semiótica es propia del pensamiento humano; 2) la creación y formación de nuevos sistemas semióticos es signo de avance del conocimiento.

3.1.2 Tipos de transformación de representaciones semióticas

Según Duval y Saenz (2016), existen dos tipos de transformación de representación semiótica que son totalmente diferentes, en los cuales los procesos cognitivos son distintos, tratamientos y conversiones.

El tratamiento hace referencia a las transformaciones de las representaciones que ocurren internamente en el mismo registro, por ejemplo, para la parábola: 1) tratamiento en el registro gráfico, trazar la parábola, identificar y etiquetar sus elementos; 2) tratamiento en el registro verbal, describir con palabras la parábola, sus elementos y propiedades; 3) tratamiento en el registro algebraico, encontrar la ecuación general, las coordenadas del vértice y del foco, la ecuación de la directriz.

La conversión se entiende como las transformaciones de las representaciones de un objeto matemático que consiste en cambiar de registros, pero sin cambiar de objeto, por ejemplo, a partir de la gráfica de la parábola encontrar la ecuación canónica y general de ésta, aquí se evidencia que se cambia del registro gráfico al algebraico y requiere la coordinación; la conversión debe permitir comprender el lazo entre la semiosis y noesis.

En la figura 1, se muestra los tipos de transformación de representaciones semióticas, tratamiento y conversión, donde se señala que el tratamiento ocurre dentro de un mismo registro (lenguaje común, figural, algebraico y aritmético) y la conversión se da en el cambio de registros, es decir, pasar de un registro a otro.

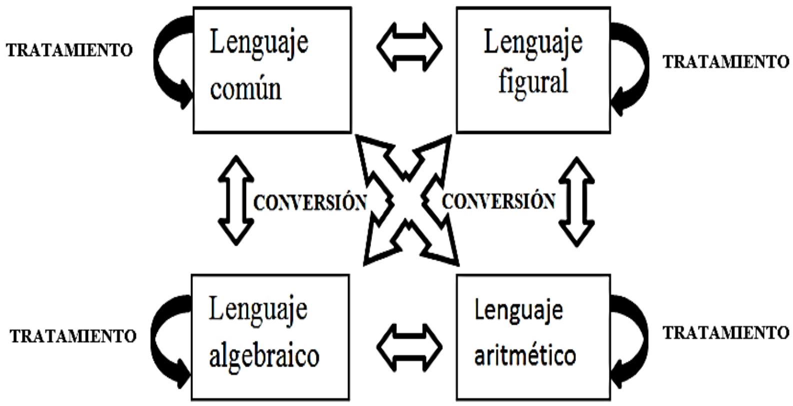


Figura 1. Tratamiento y conversión en la teoría de las representaciones semióticas

Fuente: construcción propia.

3.1.3 Tipos de registro de representación semiótica

Según Duval (2006), se movilizan cuatro tipos de registro de representación semiótica en matemáticas: 1) los registros multifuncionales discursivos son los que hacen uso de una lengua, lenguaje natural o lengua materna para dar explicaciones en una locución común o escritura simbólica; 2) los registros multifuncionales no discursivos son los que muestran formas, figuras geométricas, diseños y gráficos, allí se puede evidenciar aquello que no es dado de manera visible; 3) los registros monofuncionales discursivos son sistemas de escritura numérica algebraica y simbólica con carácter formal y técnico, apoyados en las reglas de formación de representaciones para sistematizar, formalizar y formular; 4) los registros monofuncionales no discursivos son configuraciones de unidades figúrales y pone visible los aspectos numéricos.

Los registros monofuncionales discursivos y no discursivos, y los registros multifuncionales discursivos y no discursivos. Los monofuncionales se apoyan en las reglas de formación de representaciones, donde los tratamientos asumen la forma de algoritmos, mientras que en los multifuncionales los tratamientos no toman esta forma (Duval, 2006).

En esta investigación los registros multifuncionales discursivos se denominaron como "registro verbal", los registros multifuncionales no discursivos como "registro gráfico", los registros monofuncionales discursivos como "registro algebraico" y los registros monofuncionales no discursivos no serán abordados, ya que para este trabajo se considera que no es relevante hacer uso de las configuraciones de unidad figúrales, ya que requiere de un mayor análisis para proveer información y examinar las propiedades de la parábola.

3.1.4 Formas de representar los registros

Una forma para expresar los registros de representación semiótica y las representaciones semióticas es la propuesta por D'Amore (2004) se evidencian en la Tabla 1, donde utiliza las siguientes nomenclaturas:

Nomenclatura	Significado
$\boldsymbol{C = df}$	Concepto matemático
r^m	Registro semiótico $(m = 1,2,3, \ldots)$ del df
$R^m{}_i(A)$	Representación semiótica i-ésima $(i = 1,2,3, \ldots)$ del contenido A en el registro r^m

Tabla 1. Nomenclaturas utilizadas en la teoría de las representaciones semióticas Fuente: adaptado de D'Amore (2004).

Con esta notación aplicada a los registros de las representaciones semióticas, siendo A el objeto matemático parábola, se presenta el siguiente ejemplo:

Registro semiótico r^1: lenguaje verbal

Representación semiótica $R^1{}_1$ "una parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta. La definición excluye el caso en que el foco está sobre la directriz". (Lehmann, 2003, p.148).

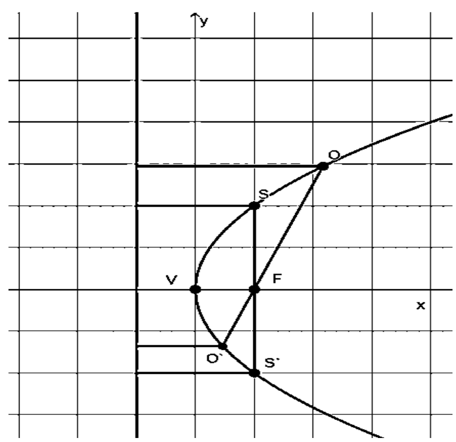
Registro semiótico r^2: el lenguaje algebraico.

Representación semiótica $R^2{}_1$: ecuación canónica de la parábola, $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.

Representación semiótica $R^2{}_2$: ecuación general $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$.

Registro semiótico r^3: gráfico.

Representación semiótica $R^3{}_1$: gráfica de la parábola en el plano cartesiano xy con vértice (h, k) que abre hacia la derecha.



3.1.5 La importancia de las representaciones semióticas

En la actividad matemática de alguna clase es necesario utilizar un sistema semiótico de representación, en este proceso siempre se sustituye algún tipo de representación semiótica por otra, pero lo importante no es el uso de diversas representaciones semióticas sino la transformación de estas. Las transformaciones de las representaciones semióticas son parte fundamental de este proceso, puesto que los objetos matemáticos no son visibles e accesibles por apreciación o por medición, la única forma de tener acceso y hacer uso de estos objetos es a través de las representaciones semióticas y el uso de signos (Duval, 2002).

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos de la matemática, las representaciones semióticas son un factor importante para el acercamiento a objetos matemáticos, que no son accesibles físicamente, sino a través de dichas representaciones, como signos y símbolos. Por tal razón, la enseñanza debe centrarse en un contexto de representaciones y es necesario hacer uso de sistemas de representación distintos a los utilizados en el lenguaje natural, como: sistemas gráficos, simbólicos, algebraicos y analíticos para la comprensión de objetos matemáticos (Vallejo y Tamayo, 2008).

El aprendizaje de las matemáticas requiere analizar actividades cognitivas como la conceptualización, la comprensión, la resolución de problemas y la interpretación de situaciones, así, Duval (citado por González, 2011) "afirma que no puede haber comprensión en matemáticas, si no se distingue un objeto de su representación, pues, un mismo objeto matemático puede presentarse mediante representaciones muy diversas" (p.12).

3.2 Análisis histórico del objeto matemático parábola

En este apartado se presenta el desarrollo de la primera etapa propuesta de la investigación, un breve análisis histórico del objeto matemático parábola, comprende: 1) la historia de la parábola, que permitió identificar las primeras nociones de esta y los tipos de representaciones que se utilizaron; 2) análisis de la parábola en los libros de texto, para determinar los elementos que constituyen el objeto parábola, las representaciones semióticas utilizadas y los ejercicios que allí estaban propuestos con el fin de identificar los tipos de transformación semiótica; 3) finalmente, se presentan como resultado de este capítulo los elementos del objeto matemático parábola con sus respectivas representaciones semióticas.

3.2.1 Historia de la parábola

3.2.1.1 La parábola según Menecmo

A Menecmo, hacia los años (360 o 350 a. de C.) es a quien se le atribuye el descubrimiento o invención de las secciones cónicas como resultado de la solución del problema de duplicación del cubo. El nombre lugar sólido con el que se identificaba las cónicas tuvo que ver con la manera en que los griegos clasificaban las curvas (Tapia, 2002).

Además, a Menecmo se le atribuye el descubrimiento a lo que se le llama parábola e hipérbola equilátera, introduce "las curvas como secciones de un cono circular recto intersectado por un plano perpendicular a una generatriz" (Tapia, 2002, p.21); uso el nombre de parábola como sinónimo para una sección cónica de un cono rectangular y con esta terminología sección de cono rectángulo que aparece con Arquímedes. Sin embargo, hacia fines del siglo IV a.c aparecieron dos obras importantes sobre el desarrollo de las cónicas: el libro de los lugares sólidos de Aristeo, en donde aparecen las cónicas como la intersección de cilindros y conos con planos, la segunda obra también perdida, es la de Euclides, los cuatro libros, donde se encuentra la mayor parte del material sobre las cónicas de Apolonio (Tapia, 2002).

3.2.1.2 La parábola según Apolonio de Pergámo

A Apolonio de Pérgamo (2600-1900 a.c) se le atribuye que por primera vez son tomadas las secciones cónicas como secciones de un mismo cono circular, discutiendo según las propiedades geométricas obtenidas, las cuales se pueden deducir haciendo uso de "un sistema coordenado de paralelas mediante la ecuación del vértice $y^2 = rx\left(1 \pm \frac{x}{t}\right)$ *(r=latus rectum, t=latus ransversum).* Aparecen en este momento los términos elipse, parábola, hipérbola (compuesta de dos "secciones complementarias" que están en relación con las construcciones equivalentes de Euclides" (Hofmann, 2002, p.38).

Así mismo, Apolonio encontró que “el cuadrado de la cuerda es proporcional a su distancia al vértice de su cuerda ($y^2 = 2px$) y en los otros casos, la cuerda presenta defecto o exceso sobre aquel valor ($y^2 = 2px \pm cx^2$)” (Hernández, 2002, p.41).

González (s.f), argumenta que las palabras elipse, parábola e hipérbola, son términos que no eran nuevos ni acuñados por la ocasión, sino que fueron adaptados a partir de un uso anterior, quizás gracias a los pitagóricos en la solución de ecuaciones cuadráticas utilizando el método de aplicación de áreas. Al respecto se encuentra que:

> “Ellipsis que significa una deficiencia y se utilizaba cuando un rectángulo dado debía aplicarse un segmento dado y resultaba escaso en un cuadrado. Mientras que la palabra hypérbola (de avanzar más allá) se adoptó para el caso en que el área excedida del segmento dado, y por último la palabra parábola (de colocar al lado o comparar) indicaba que no había ni diferencia ni exceso” (p.359).

La explicación del uso que realizaba Apolonio de los nombres de elipse, hipérbola y parábola, en términos más claros se tiene: partiendo de la ecuación de una parábola de vértice en el origen y el eje el de las abscisas, $y^2 = 2px$, esta curva presenta la propiedad que “para todo punto $P(x, y)$ tomado sobre ella, el área del cuadrado construido sobre su ordenada, y^2; es exactamente igual al área del rectángulo construido sobre la abscisa y de altura el parámetro $2p = l$, llamado latus rectum” (González, s.f, p.360).

El breve estudio que se realizó sobre la historia de la parábola permitió identificar las diferentes representaciones semióticas en el registro algebraico que se utilizaban; $y^2 = rx\left(1 \pm \frac{x}{t}\right)$, $y^2 = 2px$ y $y^2 = 2px \pm cx^2$, así mismo como fue definida; “las curvas como secciones de un cono circular recto intersectado por un plano perpendicular a una generatriz” (Tapia, 2002, p.21) y "para todo punto $P(x, y)$ tomado sobre ella, el área del cuadrado construido sobre su ordenada, y^2; es exactamente igual al área del rectángulo construido sobre la abscisa y de altura el parámetro $2p = l$, llamado latus rectum" (González, s.f, p.360) y algunas características sobre esta, cabe resaltar que en este análisis no se encontró representaciones gráficas de la parábola.

3.2.2 Análisis de la parábola en los libros de texto

Para determinar los elementos que constituyen el objeto matemático parábola se seleccionaron cuatro libros, que a continuación se relacionan, en los cuales se presenta esta temática, los tres primeros corresponden al grado decimo de educación media; y el último es usado en el universitario.

1) Torres, M. (2001). Supermat matemáticas, educación media. Bogotá, Colombia: Voluntad

2) Moreno, V., y Restrepo, M. (2001). Nuevo Alfa 10, serie de matemáticas con énfasis en competencias. Bogotá, Colombia: Norma.

3) Alfonso, L., Salgado, D., Romero, J., y Torres, W. (2004). Trigonometría y geometría analítica. Bogotá: Santillana.

4) Lehmann, C. (2003). Geometría analítica. México, D.F.: Grupo Noriega Editorial.

En la Tabla 2, se presenta una síntesis de los elementos que conforman el objeto matemático parábola, en el libro Supermat matemáticas.

Tabla 2. *Contenidos de la parábola, editorial Voluntad.*

Editorial	**Titulo**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Voluntad	Supermat matemáticas educación media	Torres Marlady	Bogotá	2001
		Contenidos		
Temas		**Descripción**		

Definición de parábola	Define la parábola como el conjunto de puntos del plano cuya distancia a una recta fija es igual a la distancia hasta un punto fijo. A la recta fija la llama directriz y al punto fijo lo llama foco.
Elementos de la parábola	Los elementos de la parábola son: directriz, eje, vértice, cuerda y lado recto. Directriz: no se considera como un elemento, solo indica en una gráfica cual es. Eje: es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco F. La recta representa por a. Vértice (V): es el punto medio entre la directriz y el foco. Cuerda: segmento de cuerda que une dos puntos de la parábola. Además, enuncia que si la cuerda pasa por el foco se llama cuerda focal. Así mismo presenta estos elementos de forma gráfica.
Ecuación de la parábola de vértice en el origen	Aclara que el vértice de la parábola es $(0,0)$ y la distancia que hay entre el vértice y el foco se llama p. Las coordenadas del vértice y foco son: $V(0,0)$ y $F(p,0)$. Las coordenadas de un punto Q son $(-p,x)$ que pertenecen a la directriz. Argumenta que de acuerdo a la definición de la parábola, se tiene que, $dis(p,F) = dis(p,Q)$, obteniendo la expresión $(x-p)^2 + y^2 = (x-p)^2$. Al desarrollar el cuadrado del binomio se obtiene la ecuación de una parábola con vértice en el origen cuyo eje coincide con eje x, $y^2 = 4px$, si el foco está a la derecha de vértice entonces la parábola abre hacia la derecha y si está a su izquierda entonces la parábola abre hacia la izquierda y tiene como ecuación $y^2 = -4px$. Así mismo expone que la ecuación de una parábola cuyas ramas abren hacia arriba es de la forma $x^2 = 4py$. Si el foco está por encima del vértice entonces la parábola abre hacia arriba y si está por debajo del vértice entonces la parábola abre hacia abajo y su ecuación será de la forma $x^2 = -4py$. Presenta ejemplos de cómo encontrar la ecuación de la parábola dada las coordenadas del foco y el parámetro p.
Ecuación de la parábola de vértice $V(h,k)$	Presenta la ecuación de la parábola de vértice $V(h,k)$ y eje focal paralelo al eje x como una traslación $t(h,k)$ sobre la ecuación $y^2 = 4px$, se encuentra remplazando en la ecuación de la parábola original x por $(x-h)$ y a y por $(y-k)$, de donde se obtiene $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ y si la parábola abre hacia la izquierda su ecuación es $(y-k)^2 = -4p(x-h)$. Posteriormente expone la ecuación de la parábola con eje focal paralelo al eje y como una traslación $T = (h,k)$ sobre la ecuación $x^2 = 4py$, se encuentra remplazando en la ecuación de la parábola original x por $(x-h)$ y a y por $(y-k)$ de donde obtiene $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.

Formas de ecuaciones de parábolas con vértice $V(h,k)$	Enuncia las formas ecuaciones de la parábola con vértice $V(h,k)$ donde expone que si la ecuación tiene la forma $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ entonces tiene una gráfica simétrica al eje $x = h$, abre hacia arriba porque el signo de $4p$ es positivo. La ecuación $(x-h)^2 = -4p(y-k)$ tiene una gráfica simétrica al eje $x = h$, abre hacia abajo porque el signo de $4p$ es negativo. La ecuación $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ tiene una gráfica simétrica al eje $y = k$, abre hacia la derecha porque el signo de $4p$ es positivo. La ecuación $(y-k)^2 = -4p(x-h)$ es simétrica con respecto al eje $y = k$, abre hacia la izquierda porque el signo de $4p$ es negativo.
Elementos de la parábola de vértice $V(h,k)$	A través de un ejemplo da a conocer los elementos de la parábola con vértice $V(h,k)$, para esto parte de la forma que tiene la ecuación de la parábola y a partir de esta halla dichos elementos.
Ecuación general de una parábola con eje paralelo al eje x.	Presenta la ecuación: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, $B = 0$ y $A = 0$ se tiene $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.
Ecuación general de una parábola con eje paralelo al eje y.	Presenta la ecuación: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, si $B = 0$ y $C = 0$ se tiene $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$.
Ejercicios	Propone como ejercicios: En cada una de las parábolas solicita identificar la ecuación general, la distancia del vértice a la directriz, la distancia entre el foco y la directriz, coordenadas del foco y vértice y la ecuación de la recta directriz. Encuentre la ecuación de la parábola dado el parámetro p y el foco. Halla el foco y la directriz de la parábola. Encuentra la ecuación de la parábola a partir de la gráfica. Para cada una de las parábolas asociadas las ecuaciones, decide si el eje de simetría es paralelo al eje x o al eje y. Identifica cada uno de los cortes de cada una de las parábolas con los ejes cartesianos. Encuentra la ecuación y traza la gráfica de cada una de las parábolas, dado el foco y la directriz. Traza la gráfica cartesiana asociada a cada una de las siguientes ecuaciones. Encuentra la ecuación general de cada una de las parábolas dada su gráfica.

Problemas de aplicación.

De la Tabla 2, se puede evidenciar que los elementos matemáticos que conforman el objeto matemático parábola son: vértice, foco, directriz, eje de simetría y las ecuaciones de la parábola según el vértice y sus representaciones gráficas. En cuanto a los tipos de registros de representación semiótica, utiliza el registro gráfico para representar la parábola, describe y aclara las propiedades de este objeto y presenta las diferentes ecuaciones de la parábola las cuales corresponden al registro algebraico.

El siguiente libro analizado es Nuevo Alfa 10 editorial Norma, donde expone los contenidos que se abordan para comprender el objeto matemático parábola, estos contenidos los expone en la unidad 5 llamada geometría analítica, los cuales están ubicados de la página 151 a la 158. En la Tabla 3, se presenta los contenidos que constituyen el objeto matemático parábola en este texto.

Tabla 3. *Contenidos de la parábola, editorial Norma.*

Editorial	Titulo	Autores	Ciudad	Año
Norma	Nuevo Alfa 10	Vladimir Moreno Gutiérrez y Mauricio Restrepo López	Bogotá	2001
Contenidos				
Temas	Descripción			
Función cuadrática	Expone que la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola que abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo sí $a < 0$.			
Definición de parábola	Define la parábola como el conjunto de puntos (x, y) equidistantes de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.			

Elementos de la parábola	A través de una gráfica da a conocer los elementos foco, vértice, directriz y eje de simetría. Así mismo expone que cuando una parábola abre hacia arriba, el punto más bajo es el vértice. Si la parábola abre hacia abajo entonces el punto más alto es el vértice. La recta que divide a la parábola en dos partes simétricas pasando por el vértice es el eje de simetría. Plantea un ejemplo en el cual se hallan los elementos de la parábola mencionados anteriormente.
Ecuación estándar de la parábola con vértice en el origen, foco en el punto $F(0,c)$.	Presenta de forma gráfica la parábola con vértice en el origen y foco en el punto $F(0,c)$ y la directriz la recta $y=-c$, además expone que la ecuación es $x^2=4cy$, la parábola con esta ecuación abre hacia arriba si $c>0$ y hacia abajo sí $c<0$.
Ecuación estándar de la parábola con vértice en el origen, foco en el punto $F(c,0)$.	Presenta de forma gráfica la parábola con vértice en el origen y foco en el punto $F(c,0)$ y la directriz la recta $x=-c$, además expone que la ecuación es $y^2=4cx$, la gráfica de la parábola con esta ecuación abre hacia la derecha si $c>0$ y hacia la izquierda sí $c<0$.
Parábola con vértice en el punto (h,k).	A través de un ejemplo da a conocer la parábola con vértice en el punto $(h.k)$, donde señala las coordenadas del foco y la directriz: Foco: $(h,k+c)$, directriz: $y=k-c$ y foco: $(h+c,k)$, directriz: $x=h-c$. Con el uso de gráficas muestra como es la parábola para los dos posibles casos, $c<0$ y $c>0$. Así mismo enuncia las ecuaciones de la parábola para cada caso $(x-h)^2=4c(y-k)$ y $(y-k)^2=4c(x-h)$.
Lado recto de una parábola	Define el lado recto de una parábola como una cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje de simetría de la parábola. Así mismo señala que la longitud del lado reto es $\lvert 4c\rvert$ que corresponde al coeficiente de y de la ecuación $x^2=4cy$.
Ejercicios	Como ejercicios plantea encontrar la ecuación de la parábola con información sobre el foco y la directriz. Halla su foco, directriz, eje, vértice, coordenadas de los extremos del lado recto y longitud del lado recto, para algunas ecuaciones dadas de la parábola. Plantea problemas como: objeto se deja caer desde una altura h_0 metros; después de t segundos, la distancia al suelo $h(t)$ está dada por $h(t)=-30t^2+h_0$ metros. Traza la figura t contra $h(t)$ para $h=300$ metros. ¿Cuánto tarda el objeto en llegar al suelo?

	A partir de la definición de la parábola, hallo la ecuación de la parábola con vértice (0,3) y directriz de la recta $y = x$.

De la Tabla 3, se evidencia que los elementos matemáticos que conforman la parábola son: foco, vértice, directriz, lado recto, eje de simetría, ecuación estándar de la parábola con vértice en el origen, foco en el punto $F(0, c)$, ecuación estándar de la parábola con vértice en el origen, foco en el punto $F(c, 0)$, parábola con vértice en el punto (h, k) y su representación gráfica.

Por otra parte, hace uso de diferentes tipos de representación semiótica, utiliza las gráficas para representar la parábola cuando su vértice es $(0{,}0)$ y (h, k), describe verbalmente las características y propiedades de este objeto y así mismo utiliza el registro algebraico para presentar las ecuaciones de la parábola.

El siguiente libro analizado es trigonometría y geometría analítica de la editorial Santillana; en la unidad 6, titulada la línea recta y las secciones cónicas, expone los contenidos relacionados con la parábola, comprendidos de la página 214 a la 228 y se caracteriza por la manera formal como presenta las definiciones, da a conocer de donde surgen las diferentes ecuaciones de la parábola (demostraciones), acompañadas con ejemplos y gráficas. En la Tabla 4, se presenta una síntesis los contenidos que constituyen el objeto matemático parábola en este texto.

Tabla 4. *Contenidos de la parábola, editorial Santillana.*

Editorial	Titulo	Autores	Ciudad	Año
Santillana	Trigonometría y geometría analítica	Luz Stella Alfonso Orozco, Diana Constanza Salgado Ramírez, Juan de Jesús Romero Roa y Wilson Enrique Torres Sánchez	Bogotá	2004
Contenidos				
Temas	Descripción			

Definición de la parábola	Define la parábola como un lugar geométrico de puntos $P(x, y)$ del plano, que equidistan de una recta fija llamada directriz y de un punto fijo F, llamado foco. Así, $d(P, M) = d(P, F)$, donde M es un punto que pertenece a la directriz de tal forma que la distancia de este al punto $P(x, y)$ sea la misma que la distancia del $P(x, y)$ al foco. Con una gráfica de la parábola ejemplifica dicha definición.
Construcción de la parábola	Plantea una serie de pasos para realizar la construcción de la parábola haciendo uso de la escuadra, papel, lápiz e hilo.
Elementos de la parábola	A través de graficas da a conocer los elementos foco, vértice, directriz, lado recto y eje de simetría o eje focal, luego los define de la siguiente manera: Eje de simetría o eje focal (l), es la recta con respeto a la cual se refleja una rama de la parábola. El vértice (V), es el punto de intersección entre el eje de simetría y la parábola. El foco (F), es el punto sobre el eje de simetría que está separado del vértice a una distancia igual del vértice a la directriz. La directriz (d), es la recta perpendicular al eje de simetría, tal que se cumple que la distancia del vértice a la directriz es igual a la distancia del vértice al foco. El lado recto (LR), es la recta perpendicular al eje de simetría de la parábola, la cual pasa por el foco. La longitud de esta es cuatro veces la distancia del vértice al foco.
Ecuación canónica de la parábola con vértice en $(0,0)$.	Argumenta que cuando la parábola está ubicada en el plano cartesiano de tal manera que su vértice es el punto $(0,0)$ su ecuación se determina considerando dos casos: la parábola cuyo eje focal o de simetría coincide con el eje x y la parábola cuyo eje focal coincide con el eje y.
La parábola cuyo eje focal o de simetría coincide con el eje x	Demuestra que la ecuación canónica de la parábola con vértice$(0,0)$, foco en $(p, 0)$ y el eje x como eje de simetría es $y^2 = 4px$. Si $p > 0$, la ecuación $y^2 = 4px$ representa una parábola que abre hacia la derecha y por tanto el foco F se encuentra a la derecha de (0,0). Si $p < 0$, la ecuación $y^2 = 4px$ representa una parábola que abre hacia la izquierda y por tanto el foco F se encuentra a la izquierda de (0,0).
La parábola cuyo eje focal o de simetría coincide con el eje y	Demuestra que la ecuación canónica de la parábola con vértice $(0,0)$, foco en $(0, p)$ y el eje x como eje de simetría es $x^2 = 4py$.

	Si $p > 0$, la ecuación $x^2 = 4py$ representa una parábola que abre hacia arriba y por ende el foco F se encuentra arriba del vértice. Si $p < 0$, la ecuación $x^2 = 4py$ representa una parábola que abre hacia abajo y por ende el foco F se encuentra abajo del vértice.
Ejemplos	Plantea como ejemplos determinar los elementos de una parábola dada su ecuación y luego representarla gráficamente, así mismo presenta un problema de aplicación sobre la parábola.
Ecuación canónica de la parábola con vértice en (h, k)	Para deducir la ecuación de la parábola con vértice en (h, k) se consideran dos casos, la parábola con eje de simetría paralelo al eje x y la parábola con eje de simetría paralelo al eje y
Ecuación canónica de la parábola con vértice en (h, k) y eje de simetría paralelo al eje x.	Demuestra que la ecuación canónica de la parábola con vértice en (h, k) y eje de simetría paralelo al eje x es $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ donde p es la distancia del vértice al foco $LR = \|4P\|$. Además argumenta, si $p > 0$ la parábola se abre hacia la derecha y si $p < 0$ la parábola se abre hacia la izquierda. Las coordenadas del foco son $f(h+p, k)$ y la directriz está dada por la ecuación $x = h - p$.
Ecuación canónica de la parábola con vértice en (h, k) y eje de simetría paralelo al eje y.	Demuestra que la ecuación canónica de la parábola con vértice en (h, k) y eje de simetría paralelo al eje y es $(x-h)^2 = -4p(y-k)$ donde p es la distancia del vértice al foco y $LR = \|4P\|$. Además argumenta, si $p > 0$ la parábola se abre hacia arriba y si $p < 0$ la parábola se abre hacia abajo. Las coordenadas del foco son $F(h, p+k)$ y la directriz está dada por la ecuación $y = k - p$.
Ecuación general de la parábola	Demuestra cómo se obtiene la ecuación general de la parábola con vértice en (h, k) con distancia p del vértice al foco, la cual tiene como ecuación general la expresión de la forma, $y^2 + Dx + Ey + F = 0$ si su eje es paralelo al eje x y $x^2 + Dx + Ey + F = 0$ si su eje es paralelo al eje y.
Ecuación de la parábola dadas tres condiciones	Argumenta que la ecuación de la parábola queda determinada por tres condiciones, en la forma canónica por los valores de h, k y p y en la forma general, por los valores D, E y F.
Ejercicios	Propone ejercicios para determinar la ecuación canónica de la parábola cuando su vértice es $(0,0)$ y (h, k), a partir de cada gráfica propone encontrar su ecuación, los elementos de la parábola dada la ecuación y problemas de aplicación.

De la Tabla 4, se evidencia que los elementos que conforman el objeto matemático parábola son: foco, vértice, directriz, eje de simetría, lado recto, la ecuación canónica de la parábola con vértice en $(0,0)$, la parábola cuyo eje focal o de simetría coincide con el eje y, la parábola cuyo eje focal o de simetría coincide con el eje x, ecuación canónica de la parábola con vértice en (h,k), ecuación canónica de la parábola con vértice en (h,k) y eje de simetría paralelo al eje x, ecuación canónica de la parábola con vértice en (h,k) y eje de simetría paralelo al eje y y la ecuación general de la parábola y sus respectivas representaciones gráficas.

Por otro lado, en cuanto a los registros de representación semiótica utilizados en este apartado, involucran el registro gráfico al representar la parábola cuando su vértice es $(0,0)$ y (h,k), el algebraico al exponer las ecuaciones de este objeto y el verbal al describir los elementos y características de la parábola.

En siguiente texto analizado fue la geometría analítica del Grupo Noriega Editores, el autor expone las temáticas abordadas en el capítulo VI de manera formal, dando definiciones, teoremas, corolarios con las respectivas demostraciones, las cuales están acompañadas de diagramas y esquemas. En este capítulo se incluyen ejemplos de aplicación y ejercicios, incrementando el nivel de exigencia en cada ejercicio propuesto. En la Tabla 5, se resumen los temas que conforman el objeto matemático parábola en este texto.

Tabla 5. *Contenidos de la parábola, Grupo Noriega Editorial.*

Editorial	Titulo	Autores	Ciudad	Año
Grupo Noriega Editorial	Geometría analítica	Charles H. Lehmann	México	2003
		Contenidos		
Temas	Descripción			
Definición de la parábola	Define la parábola como un lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que su distancia a una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia a un punto fijo			

	del plano y que no pertenece a la recta. La definición excluye el caso en que el foco está sobre la directriz. De igual forma, denomina como foco el punto fijo y como directriz la recta fija, designa al foco como *f* y la directriz de una parábola como *l*, la recta *a* perpendicular a *l* y que pasa por *f* se llama eje de la parábola. El autor demuestra de una manera formal como se obtiene las ecuaciones de la parábola de vértice en el origen y eje un eje coordenado, exponiendo:
Ecuación de la parábola de vértice en el origen y eje un eje coordenado	La ecuación de una parábola de vértice en el origen y eje el eje x, es $y^2 = 4px$, en donde el foco es el punto $(p, 0)$ y la ecuación de la directriz es $x = -p$. Si $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha; si $p < 0$, la parábola se abre hacia la izquierda. La ecuación de una parábola de vértice en el origen y eje el eje x, es $x^2 = 4py$, en donde el foco es el punto $(0, p)$ y la ecuación de la directriz es $y = -p$. Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba; si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.
Ecuación de la parábola de vértice (h, k) y eje paralelo a un eje coordenado	Demuestra de manera formal como se llega a la ecuación de una parábola de vértice (h, k) y eje paralelo a un eje coordenado, donde concluye a través de un teorema lo siguiente: la ecuación de una parábola con vértice (h, k) y eje paralelo al eje x, es $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, siendo $\|p\|$ la longitud del segmento comprendido entre el foco y el vértice. Además, si $p > 0$, la parábola abre hacia la derecha; si $p < 0$, abre hacia la izquierda. Si el vértice es el punto (h, k) y el eje de la parábola es paralelo al eje y, entonces su ecuación es $(x - h)^2 = 4p(y - k)$. Si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba; si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.
Función cuadrática	Argumenta que la función cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, está representada gráficamente por la parábola vértice $y = ax^2 + bx + c$ cuyo eje es paralelo o coincide al eje y y cuyo vértice es el punto $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$. Además, si $a > 0$ la parábola abre hacia arriba y su vértice es un punto mínimo; si $a < 0$ abre hacia abajo y su vértice es un punto máximo.
Aplicaciones de la parábola	Da a conocer las aplicaciones de la parábola, las cuales son: arco parabólico y propiedad focal de la parábola. Expone de manera formal estas aplicaciones y presenta algunos teoremas que caracterizan este objeto.
Ejercicios	Propone un conjunto amplio de ejercicio sobre la parábola, como encontrar la ecuación de la parábola con vértice (0,0) dadas ciertas condiciones, ejercicios de demostración sobre temas de

	la parábola, hallar la ecuación de la parábola cuando su vértice es $(h.k)$, demostraciones sobre la parábola con vértice (h,k), encontrar los valores máximos o mínimos de cada función dada.

De la Tabla 5, se evidencia que los elementos que conforman el objeto matemático parábola son: foco, directriz, las ecuaciones de la parábola con vértice en el origen y en un punto (h,k). En cuanto a los tipos de registros de representación semiótica involucra el registro verbal, algebraico y gráfico, el verbal al demostrar propiedades y características de la parábola, el gráfico al ejemplificar con la representación gráfica de la parábola su definición y demostraciones de varios teoremas y el algebraico al mostrar las ecuaciones de la parábola.

3.2.3 Objeto matemático parábola

El análisis de las investigaciones sobre el objeto matemático parábola, incluidas en los antecedentes, el análisis de los libros de textos y el análisis sobre la historia del concepto, oriento la inclusión de los siguientes aspectos necesarios para la comprensión del objeto matemático parábola: los elementos que constituyen el concepto de parábola y los sistemas de representación. A continuación, se define cada uno de estos aspectos.

La ecuación de la parábola se deduce a partir de la definición como el lugar geométrico de un punto que se desplaza conforme lo expresa la ley especificada.

Definición: de acuerdo con Lehmann (2003):

> “una parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta. La definición excluye el caso en que el foco está sobre la directriz”. (p.148)

3.2.3.1 Elementos del objeto parábola.

Del análisis de la historia y de los libros de textos, permite concluir que los elementos que configuran el objeto matemático parábola son los siguientes:

Foco (F): punto fijo situado sobre el eje de simetría que se encuentra a una distancia p del vértice.

Vértice (V): punto de intersección entre la curva y el eje de simetría, además es el punto medio entre la recta directriz y el foco.

Eje de simetría: recta vertical que divide la figura en dos partes congruentes también es denominado eje focal.

Directriz (l): recta perpendicular al eje de simetría que se encuentra a una distancia p del vértice, $x = \pm p$ o $y = \pm p$

Distancia focal (p): es la distancia entre el foco y el vértice

Lado recto (LR): es una cuerda paralela a la directriz y perpendicular al eje de simetría que pasa por el foco. Su valor es cuatro veces la distancia focal.

Cuerda: línea recta que une dos puntos cualesquiera de la curva.

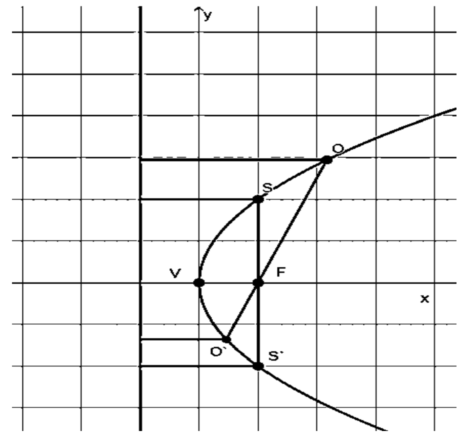
3.2.3.2 Representaciones semióticas del objeto matemático parábola.

En la tabla 6, se presentan las diferentes representaciones semióticas para el objeto matemático parábola, concluidas del análisis teórico y de los libros de texto, las cuales están clasificada según los registros verbales, algebraico y gráfico.

Tabla 6. *Representaciones semióticas del objeto matemático parábola*

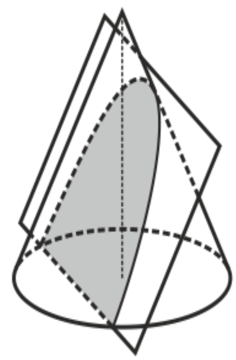
Registro verbal: r^1	Registro algebraico: r^2	Registro gráfico: r^3
R_1^1: Una parábola es un conjunto de puntos (x, y) equidistante de		R_1^3:

un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.



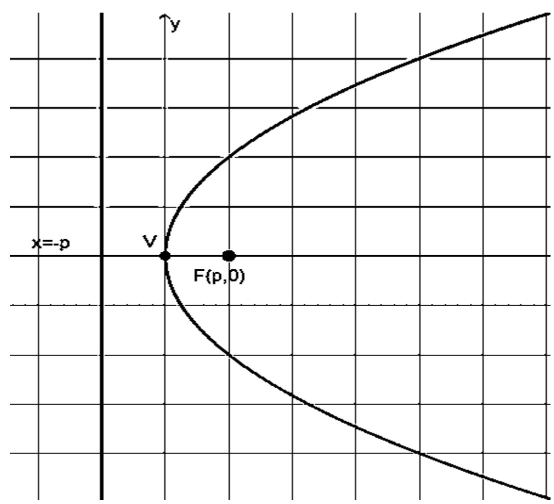
R_2^3: Parábola como sección cónica

R_2^1: Parábola como sección cónica. Al realizar un corte a un cono recto con un plano, resulta el objeto parábola.



R_1^2: Ecuación canónica $y^2 = 4px$, con $p > 0$.

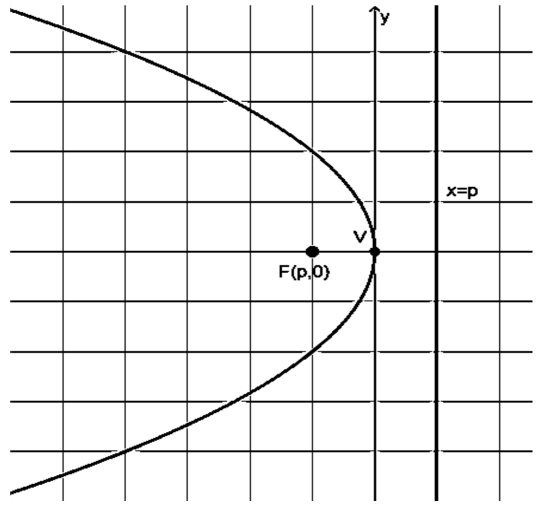
R_3^3:



R_3^1: Parábola con vértice en el origen y eje de simetría el eje de las abscisas x.

R_2^2: Ecuación canónica $y^2 = 4px$, con $p < 0$.

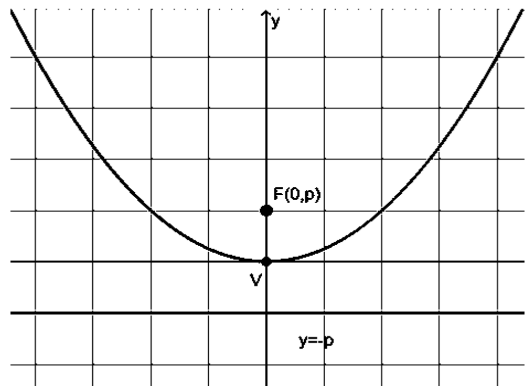
R_4^3:



R_3^2: Ecuación canónica

$x^2 = 4py$, con $p > 0$.

R_5^3:

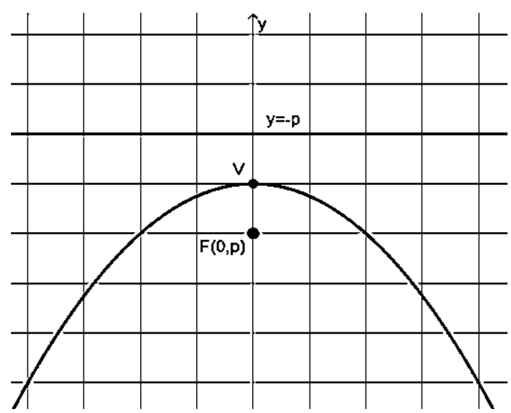


R_4^1: Parábola con vértice en el origen y eje de simetría el eje y.

R_4^2: Ecuación canónica

$x^2 = 4py$, con $p < 0$.

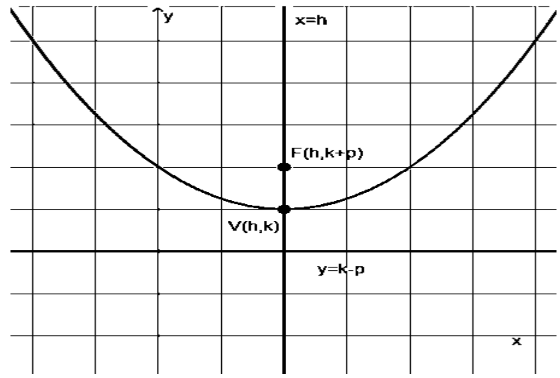
R_6^3:



R_5^1: Parábola con vértice en (h,k) y eje de simetría paralelo el eje y.

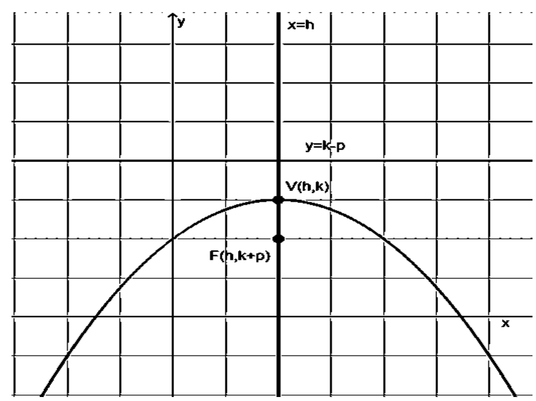
R_5^2: Ecuación canónica $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, con $p > 0$.

R_7^3:



R_6^2: Ecuación canónica $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, con $p < 0$.

R_8^3:

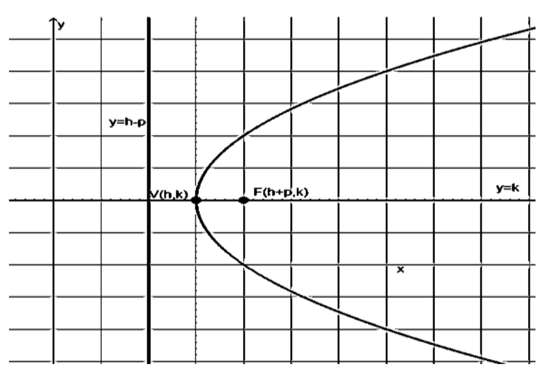


R_6^1: Parábola con vértice en (h,k), con $p > 0$.

y eje de simetría paralelo el eje x.

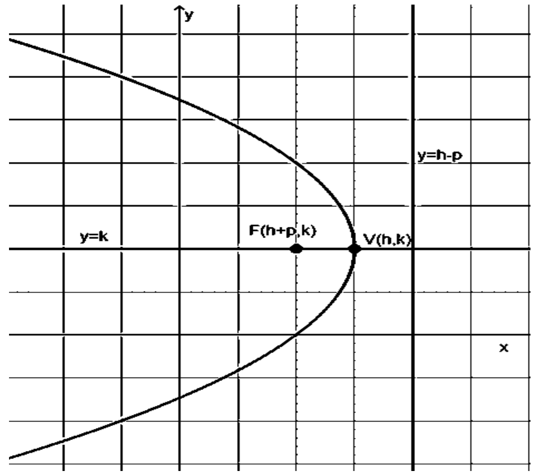
R_7^2: Ecuación canónica $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, con $p > 0$.

R_9^3:



R_8^2: Ecuación canónica $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, con $p < 0$.

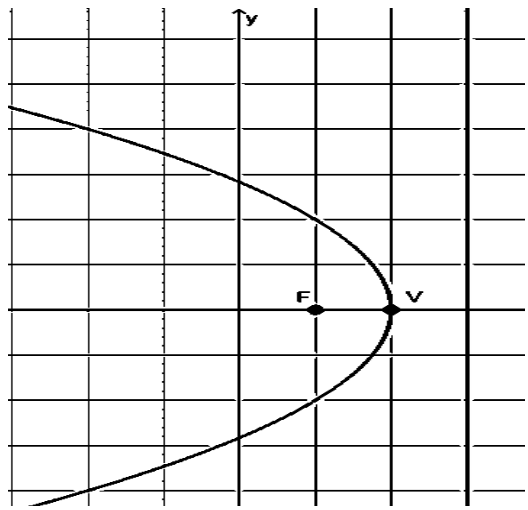
R_{10}^3:



R_7^1: Ecuación general de la parábola con vértice en (h,k) y eje de simetría paralelo el eje x.

R_9^2: Ecuación general $y^2 + Dx + Ey + F = 0$

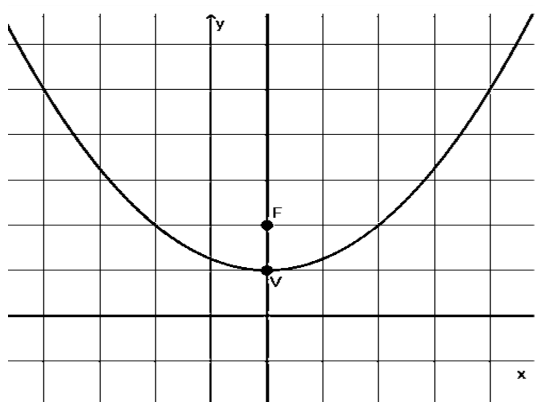
R_{11}^3:



R_8^1: Ecuación general de la parábola con vértice en (h,k) y eje de simetría paralelo el eje y.

R_{10}^2: Ecuación general $x^2 + Dx + Ey + F = 0$

R_{12}^3:



4. Metodología

A continuación, se presentan los aspectos que fundamentaron el desarrollo de la investigación y que permitieron alcanzar los objetivos planteados. En primer lugar, se define el enfoque de la investigación, el método de la investigación, la unidad de análisis, por último, la descripción de los instrumentos, técnicas y etapas en la recolección y análisis de la información.

4.1 Enfoque de investigación

El enfoque de esta investigación fue cualitativo definido “como un conjunto de prácticas interpretativas que hacen al mundo visible, lo transforman y convierten en una serie de representaciones en forma de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos” (Hernández, Fernandez, y Baptista, 2006, p.9), orientado a la descripción, comprensión e interpretación de situaciones, métodos y procesos que desarrollan los estudiantes en la comprensión del objeto matemático parábola.

4.2 Método de la investigación

El método utilizado para este estudio de acuerdo a la delimitación del problema y los objetivos propuestos fue la investigación–acción, entendida “como una forma de búsqueda autorreflexiva, llevada a cabo por los participantes en situaciones sociales (incluyendo las educativas), para perfeccionar la lógica y la equidad de las propias prácticas sociales o educativas en las que se efectúan estas prácticas” (Kemmis; citado por Rodríguez, Gil y García, 1999, p.53).

Algunas de las características fundamentales de la investigación–acción, según Rodríguez, Gil y García (1999) son:

- Examina los problemas desde el punto de vista de quienes estan involucrados en ellos.

- Adopta una postura teórica para cambiar o mejorar las situaciones sociales o prácticas educativas.
- Contempla la situación desde el punto de vista de los participantes, describiendo y explicando las acciones humanas y las situaciones sociales o educativas.
- Analiza lo que ocurre en una situación problema desde un punto de vista de quienes actúan e interactúan en esta, por ejemplo, estudiantes y profesores.

Las anteriores características responden a los propósitos de la investigación, porque se examinaron las dificultades que presentan los estudiantes en la interpretación del objeto matemático parábola, se adoptó una postura teórica de la configuración del objeto matemático parábola con el fin de mejorar la comprensión de este objeto, para esto, se planteó una serie de estrategias que permitieron la interpretación de dicho objeto, así mismo se logró describir, analizar e interpretar de forma detallada los procesos, métodos y estrategias que utilizaron los estudiantes en las actividades de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas, y a partir de esto, establecer niveles de comprensión del objeto matemático parábola

4.5 Unidad de análisis

Los estudiantes que participaron en la investigación fueron 22, entre la edad de 15 a 16 años, de una institución carácter privada, del grado décimo, de la asignatura de matemáticas del Colegio de la Presentación ubicado en la ciudad de Tunja; para el análisis de la información se elige una muestra de 9 estudiantes por conveniencia, los cuales estuvieron en todas las sesiones de la investigación, pero solo seis de ellos participaron voluntariamente en la entrevista, por tal razón el análisis se realiza con estos 6 estudiantes.

4.6 Categorías de análisis

Las categorías que se tuvieron en cuenta para esta investigación fueron las relacionadas con los tipos de representación semiótica planteados por Duval y Saenz (2016), tratamiento y conversión los cuales son diferentes. Estas categorias se presentan a continuación:

La primera categoria de análisis es la actividad de tratamiento, la cual hace referencia a las transformaciones de las representaciones que ocurren dentro del mismo registro.

La segunda categoría de análisis es la actividad de conversión, que se concibe como las transformaciones de las representaciones de un objeto matemático de un registro a otro, pero sin cambiar de objeto.

4.7 Técnicas e instrumentos

Para esta investigación se utilizaron las siguientes técnicas e instrumentos para la recolección y análisis de la información:

Observación participante, asumiendo que esta técnica requiere de la vinculación del observador en las situaciones o acontecimientos que se están observando, esta implicación supone participar en cada una de las actividades que se están desarrollando en una comunidad o institución, favoreciendo un acercamiento del investigador a las experiencias que viven las personas e instituciones (Rodríguez, Gil y García, 1999).

Teniendo en cuenta lo planteado en el párrafo anterior, se participó, observó y luego se registró el proceso que desarrollaron los estudiantes en el aprendizaje del objeto matemático parábola a través del tratamiento y conversión de las representaciones semióticas~~.~~ Al analizar esta información se identificaron las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de la parábola.

El *cuestionario*, es uno de los instrumentos más usados para recoger información, se basa en una serie de preguntas abiertas, cerradas o mixtas (Fiorentini y Lorenzato, 2010). El procedimiento para aplicar esta técnica en esta investigación, consistió en el diseño de un instrumento con preguntas abiertas para identificar los tipos de transformación semiótica, posteriormente se sometió a la validación por expertos para garantizar la viabilidad y validez del mismo, finalmente se aplicó para que los estudiantes lo desarrollaran y posteriormente con el análisis de los desempeños demostrados por ellos, establecer niveles de comprensión del objeto matemático parábola y detectar errores y dificultades (ver anexo 1).

Por último, se utilizó la técnica de la *entrevista*, que se basa en una conversación entre dos personas con propósitos bien establecidos. Los tipos entrevistas son las estructuradas, no estructuradas o semiestructuradas (Fiorentini y Lorenzato, 2010). La entrevista semiestructurada fue la utilizada en la investigación, tiene la característica de ser flexible, porque a pesar de que consta de una guía de preguntas, el investigador puede realizar otras preguntas que no estaban planteadas en la guía (Gallardo, 2017). Con esta técnica se recopiló información a través de las preguntas realizadas sobre la solución del cuestionario, esto con el fin de identificar el proceso que realizaron los estudiantes en las actividades de tratamiento y conversión según la teoría de las representaciones semióticas.

4.8 Etapas de la investigación

Para llevar a cabo la investigación, se plantearon tres etapas denominadas, Etapa 1, preparatoria o planteamiento; Etapa 2, acción y observación; y la Etapa 3, analítica.

4.8.1 Etapa 1: preparatoria o planeamiento.

En esta etapa se realizó un análisis teórico del objeto matemático parábola y se crearon estrategias de enseñanza basadas en la teoría de las representaciones semióticas para la comprensión del objeto matemático parábola.

Con el propósito de establecer los elementos matemáticos que configuran el objeto de estudio y sus diferentes representaciones semióticas que promuevan su compresión, se realizó un estudio histórico de la parábola, se analizó la presentación del concepto en los libros de texto y los contenidos relacionados; los resultados de este análisis se presentaron en el Capítulo 3. Este estudio orientó el diseño de estrategias de enseñanza de la parábola basadas en la teoría de las representaciones semióticas.

Para promover la comprensión del objeto matemático parábola, se diseñaron estrategias que incluyen actividades basadas en los resultados del estudio teórico, las cuales estaban orientadas para que el estudiante realizara actividades de tratamiento en cada uno de los registros de representación gráfico, verbal y algebraico y actividades de conversión entre estos.

4.8.2 Etapa 2: acción y observación.

Esta etapa consistió en acceder progresivamente a la información, a través del desarrollo de las actividades propuestas en la etapa anterior y el registro de las situaciones, los éxitos y dificultades que demostraron los estudiantes.

4.8.3 Etapa 3: analítica.

En esta etapa se diseñaron las técnicas e instrumentos para la recolección y análisis de la información.

Para el análisis de la información se construyó una matriz de categorías, tomadas desde la teoría de las representaciones semióticas, que se muestran en la Tabla 7, consta del nivel, la actividad, el tipo de representación y transformación semiótica y el desempeño. En esta tabla se usan nomenclaturas como r^1, r^2y r^3, que simbolizan los tipos de registros de representación semiótica verbal, algebraico y gráfico respectivamente; el tipo transformación semiótica, T tratamiento y C conversión; $T: r^1$ representa la actividad de tratamiento que realiza el estudiante en el registro verbal, $T: r^2$ en el registro algebraico y $T: r^3$ en el registro gráfico; $C: r^2 \rightarrow r^1$ simboliza la actividad de conversión del registro algebraico al verbal que desarrolla el estudiante, $C: r^3 \rightarrow r^2$del registro gráfico al algebraico, $C: r^1 \rightarrow r^2$ del registro verbal al algebraico, $C: r^2 \rightarrow r^3$ del registro algebraico al gráfico, $C: r^1 \rightarrow r^3$del registro verbal al gráfico, $C: r^3 \rightarrow r^1$ del registro gráfico al verbal y $C: r^1 \rightarrow r^2 \rightarrow r^3$ es la conversión en los tres registros, verbal, algebraico y gráfico, se analiza solo esta conversión en los tres registros porque lo que se busca es que a partir de una situación problema el estudiante represente la información a través de gráficos y luego realice procesos algebraicos para hallar su solución.

Se establecieron tres niveles de comprensión, el nivel I corresponde a los estudiantes que desarrollan actividades de tratamiento en los registros r^1, r^2 y r^3, el nivel II corresponde a los estudiantes que desarrollan actividades de conversión, es decir, pasan de un registro a otro, y en el nivel III se ubican los estudiantes que desarrollan la actividad de conversión en los tres registros r^1, r^2 y r^3

Tabla 7. *Matriz de análisis de la información.*

Nivel	Actividad	Representación semiótica	Transformación semiótica	Desempeño
	1	r^1	$T: r^1$	Realiza actividades de tratamiento en el interior del registro verbal.
I	2	r^2	$T: r^2$	Realiza actividades de tratamiento en el interior del registro algebraico.
	3	r^3	$T: r^3$	Realiza actividades de tratamiento en el interior del registro gráfico.
II	4	r^2 y r^1	$C: r^2 \rightarrow r^1$	Desarrolla actividades de conversión del registro algebraico al verbal

	5	r^3 y r^2	$C: r^3 \rightarrow r^2$	Hace la conversión del registro gráfico al algebraico
	6	r^1 y r^2	$C: r^1 \rightarrow r^2$	Ejecuta actividades de conversión del registro verbal al algebraico
	7	r^2 y r^3	$C: r^2 \rightarrow r^3$	Hace la conversión del registro algebraico al gráfico
	8	r^1 y r^3	$C: r^1 \rightarrow r^3$	Hace la conversión del registro verbal al gráfico
	9	r^3y r^1	$C: r^3 \rightarrow r^1$	Hace la conversión del registro grafico al verbal
III	10	r^1, r^2 y r^3	$C: r^1 \rightarrow r^2 \rightarrow r^3$	Hace la conversión del registro verbal al registro algebraico y al gráfico

5. Recolección y análisis de la información

Teniendo como referencia los registros de representación semiótica, las trasformaciones semióticas, las estrategias didácticas propuestas para la comprensión del objeto matemático parábola, la solución del cuestionario, las soluciones individuales de cada actividad presentada en el cuestionario y la entrevista, se hizo un análisis describiendo el desempeño en cada una de las estrategias aplicadas, un análisis de las respuestas dadas por los estudiantes en el cuestionario y entrevista, allí se identificaron las dificultades y aciertos, las actividades de tratamiento y conversión realizadas por ellos. Los estudiantes elegidos para el análisis se han identificado con el seudónimo de E1 hasta E6.

5.1 Análisis de las estrategias aplicadas

La primera estrategia (ver Anexo 2), tenía como objetivo explorar, indagar y conocer el registro gráfico de la parábola, para luego, utilizando el registro verbal, explicar la noción de parábola.

Al respecto, el proceso de la construcción del objeto matemático parábola, se pudo evidenciar que a los estudiantes les gusta trabajar con el material propuesto en la estrategia como se muestra en la Figura 2.

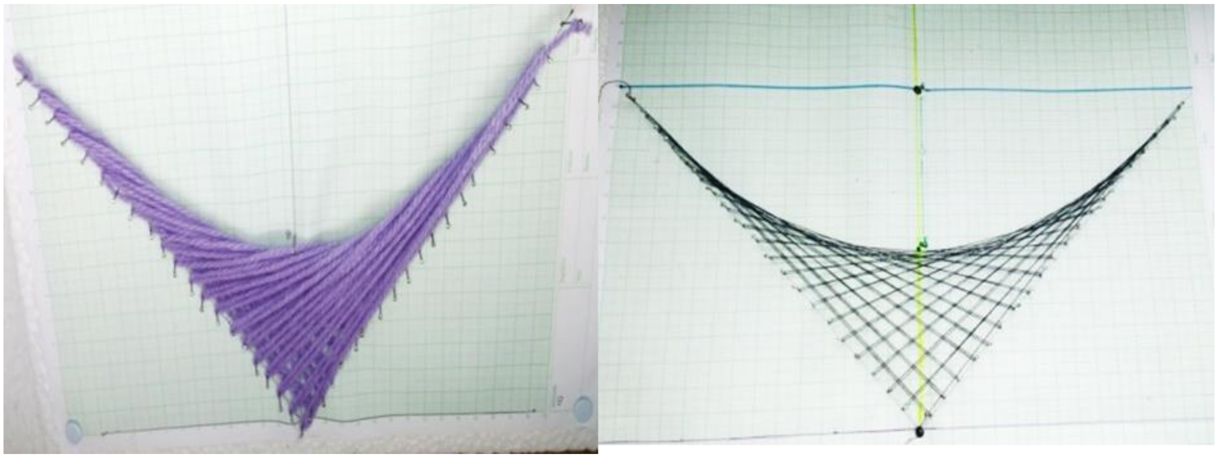
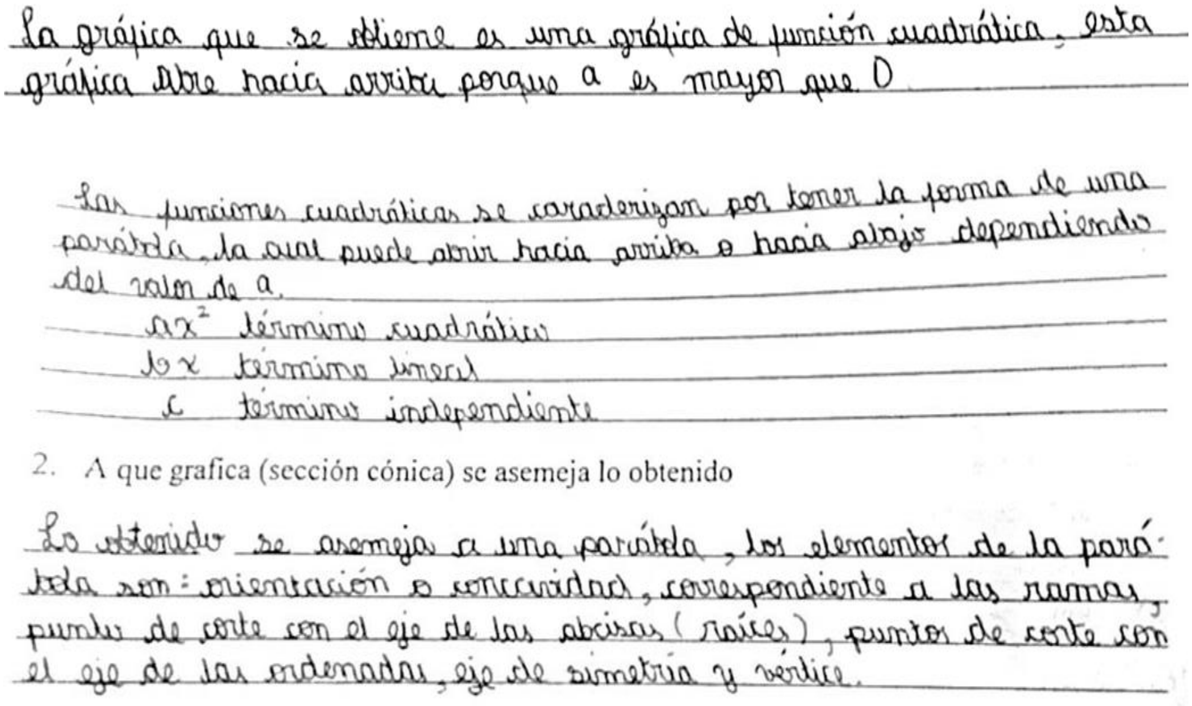


Figure 2 Construcción de la parábola por E1 y E2 respectivamente.

Al analizar las construcciones de la parábola por los estudiantes, se observa que algunos de ellos no identifican los puntos de intersección como fue propuesto en la estrategia, esto lleva a inferir que los estudiantes no reconocen qué es un punto de intersección (corte entre los segmentos, o corte entre un segmento y una gráfica).

Luego de haber realizado construcción con el material, se les pidió que la describieran y a qué sección cónica se asemeja. De las respuestas se pudo constatar que la relacionan la gráfica de la función cuadrática, tal como lo argumentan en sus descripciones los estudiantes E4 y E6, ver Figura 3 y 4.


La gráfica que se obtiene es una gráfica de función cuadrática, esta gráfica abre hacia arriba porque a es mayor que 0

Las funciones cuadráticas se caracterizan por tener la forma de una parábola, la cual puede abrir hacia arriba o hacia abajo dependiendo del valor de a.

ax^2 término cuadrático

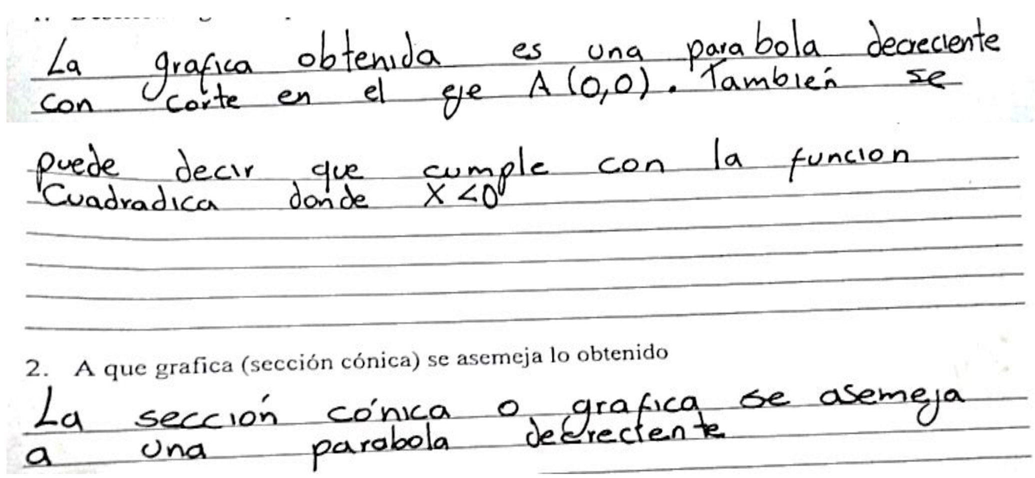
bx término lineal

c término independiente

2. A que grafica (sección cónica) se asemeja lo obtenido

Lo obtenido se asemeja a una parábola, los elementos de la parábola son: orientación o concavidad, correspondiente a las ramas, punto de corte con el eje de las abcisas (raíces), puntos de corte con el eje de las ordenadas, eje de simetría y vértice.

Figura 3. Respuestas a las preguntas de la estrategia 1 por E6


La grafica obtenida es una parabola decreciente con corte en el eje A (0,0). También se puede decir que cumple con la funcion Cuadradica donde $X<0$

2. A que grafica (sección cónica) se asemeja lo obtenido

La sección cónica o grafica se asemeja a una parabola decreciente

Figura 4. Respuestas a las preguntas de la estrategia 1 por E4

Además, otras respuestas a las preguntas de la estrategia, los estudiantes E2 y E4 relacionan la construcción con conocimientos previos de la función cuadrática. De esto, se infiere que los estudiantes a partir de la representación gráfica de la parábola la pueden expresar de forma verbal.

La segunda estrategia (ver anexo 3), tenía como objetivo realizar tratamientos en el registro gráfico y conversiones entre los registros de representación gráfico y verbal, $T: r^3$, $C: r^3 \rightarrow r^1$ y $C: r^1 \rightarrow r^3$.

Para el logro se plantearon las siguientes actividades: 1) representar en forma gráfica la parábola y describirla según la definición dada por Moreno y Restrepo (2001). "la parábola se define como el conjunto de puntos (x, y) equidistante de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz"; 2) describirla como una sección cónica y 3) describirla como un lugar geométrico.

Para la representación semiótica de la parábola en el registro r^3 los estudiantes hicieron uso de una escuadra de 45 grados, lápiz y una cuerda, en la actividad 1, los estudiantes tenían que completar los procedimientos (registro verbal) y las gráficas (representación gráfica) faltantes para luego verificar la conversión y tratamiento entre estos registros.

En la Figura 5, se evidencia el desempeño del estudiante E6 en la actividad 1, de esto se concluye que lograron pasar del registro gráfico al verbal y de registro verbal al gráfico, $C: r^3 \rightarrow r^1$ y $C: r^1 \rightarrow r^3$, tal como la argumenta Duval y Saenz (2016): la conversión son las transformaciones de las representaciones de un objeto matemático que consiste en cambiar de registros pero sin cambiar de objeto.

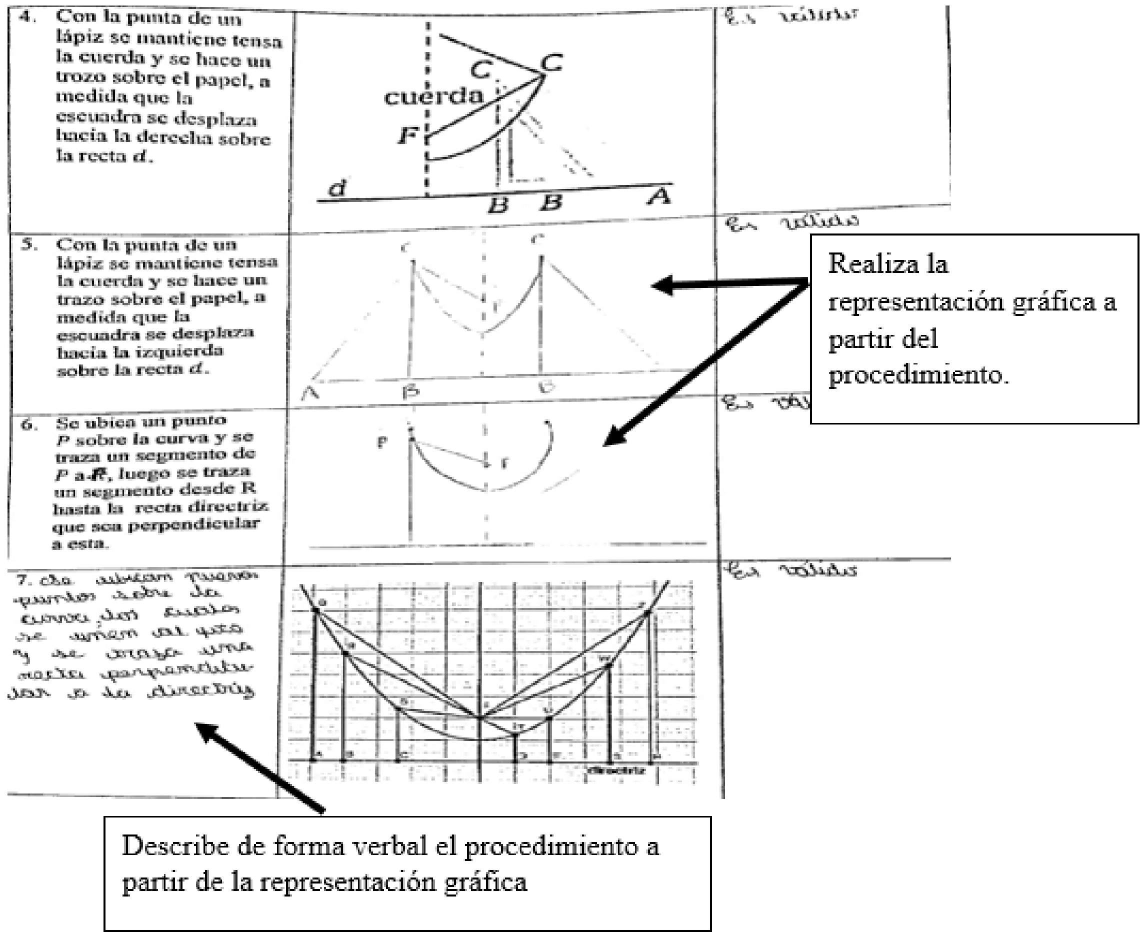


Figura 5. *Desempeño del estudiante E6 en la actividad 1 a 3 de la estrategia 2.*

Con respecto a la actividad 3 y 4, los estudiantes realizaron cada uno de los procedimientos, cuyo fin era realizar la representación semiótica de la parábola en el registro r^3 y a partir de esta realizar la representación semiótica en el registro r^1; hallar las distancias de los segmentos trazados de la recta directriz a un punto que pertenece a la parábola y de este mismo punto hacia el foco.

Sobre, la actividad 5, algunos estudiantes lograron describir de forma correcta la parábola a partir de su representación gráfica $C: r^3 \rightarrow r^1$, como se evidencia en la Figura 6 el desempeño del estudiante E5.

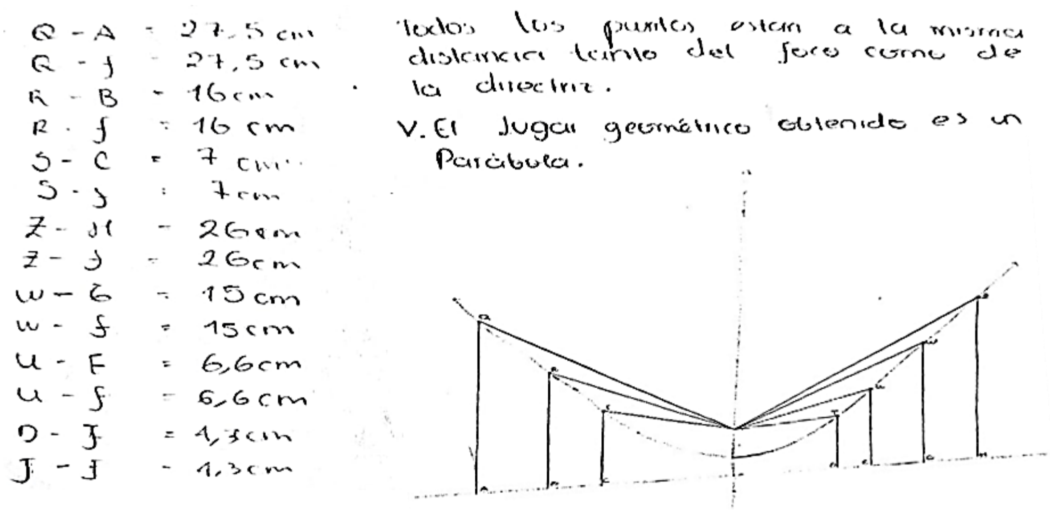


Figura 6. Respuestas del Estudiante E5 a la actividad 5 de la estrategia 2

Sin embargo, algunos estudiantes presentaron dificultad para describir la parábola, tal como se muestra en la Figura 7 sobre las argumentaciones realizadas por el estudiante E1, de donde se infiere que no lograron realizar tratamientos gráficos, $T\colon r^3$, por tanto tampoco realizar la conversión, $C\colon r^3 \rightarrow r^1$; por las siguientes razones: 1) porque no han trabajado en los demás registros (grafico, verbal, algebraico), como lo argumenta Duval (citado en D'Amore y Radford, 2017), la adquisición conceptual de un objeto se da a través varias representaciones semióticas, 2) porque al comparar las medidas que obtuvieron no les dio el mismo valor.

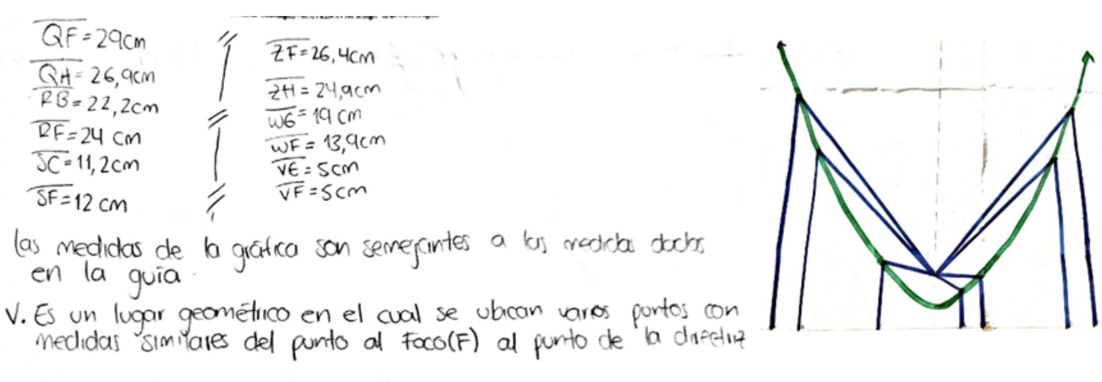


Figura 7. Respuestas del estudiante E1 en la actividad 4 de la estrategia 2

Posteriormente, sobre la actividad 6, los estudiantes a partir de otra representación semiótica de la parábola en el registro r^3 debían describirla como un lugar geométrico obtenido al realizar un corte paralelo a la generatriz con un plano a un cono recto, conversión del registro gráfico al verbal, $C\colon r^3 \rightarrow r^1$. Al respecto, todos los estudiantes describieron la parábola como un lugar geométrico y como una sección cónica resultante al realizar dicho corte, tal como se evidencia en la Figura 8.

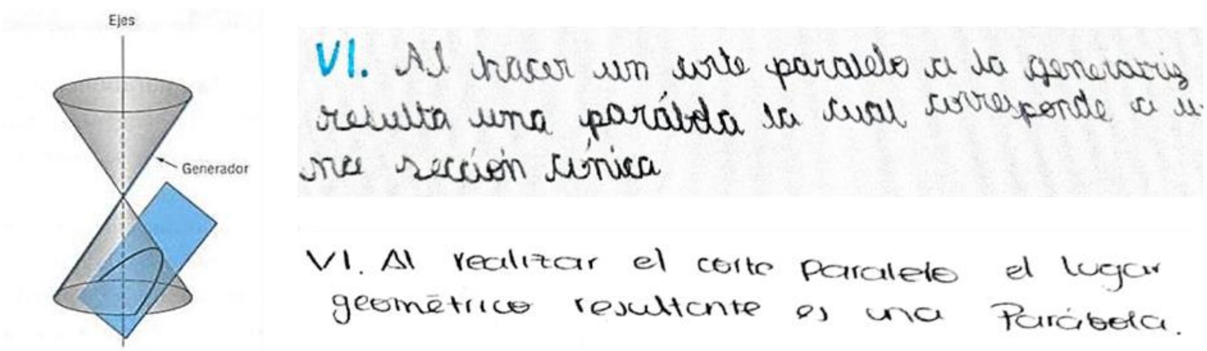


Figura 8. Desempeño de los estudiantes E6 y E5 en la actividad 6 de la estrategia 2.

En la estrategia tres (ver Anexo 4), se pretendía que los estudiantes trabajaran en el r^3 y en la actividad $C\colon r^1 \rightarrow r^3$, además promover la comprensión de los elementos de la parábola.

A partir de los elementos de la parábola representados, los estudiantes debían expresarlos en diferentes representaciones semióticas; en el desarrollo de esta tarea se observaron algunas dificultades con la relación entre los elementos, sin embargo, todos los estudiantes lograron ubicarlos en las diferentes representaciones semióticas de la parábola del registro r^3, así mismo desarrollaron la actividad $C\colon r^1 \rightarrow r^3$, porque pasaron del registro verbal al registro gráfico tal como se evidencia en la Figura 9.

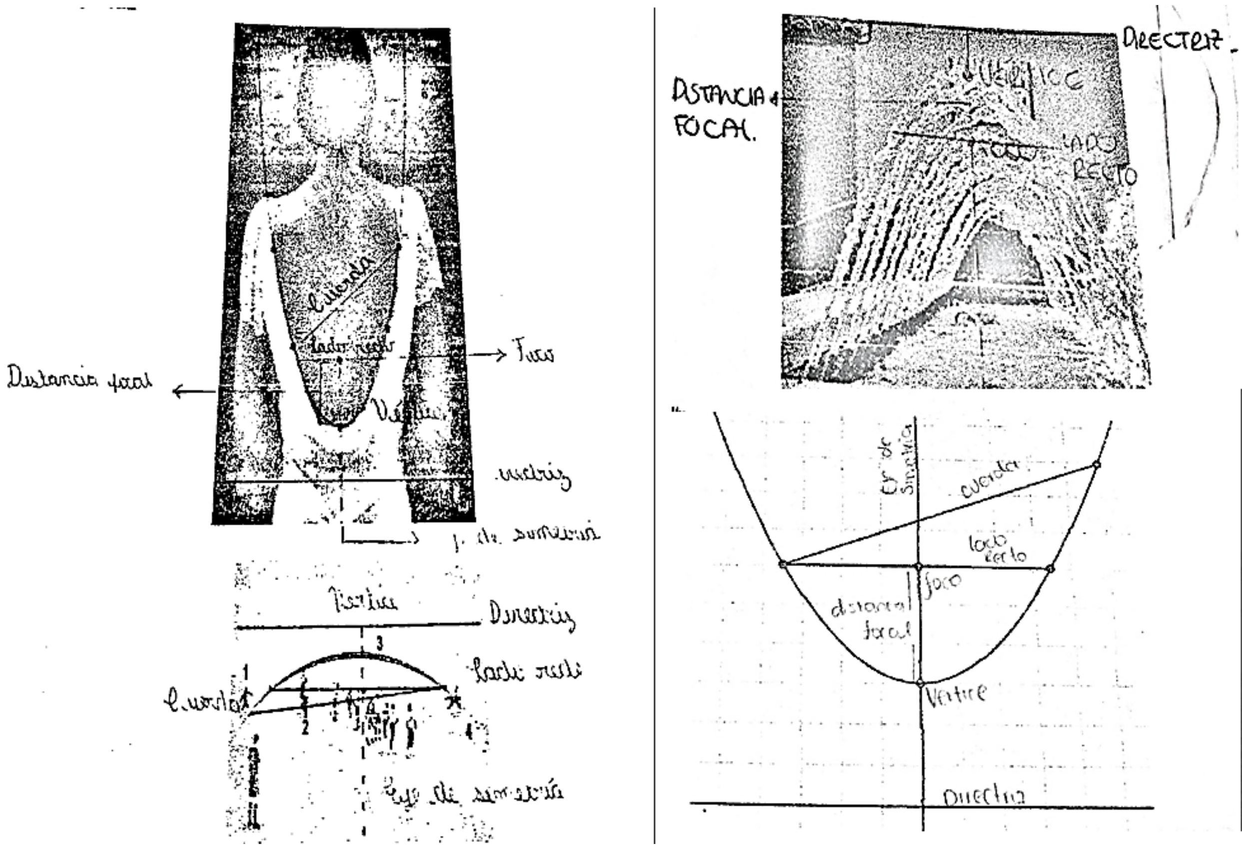


Figura 9. Respuestas E6, E5 y E3 respectivamente a las actividades 1 y 2 de la estrategia 3, anexo 4.

Posteriormente, en la actividad 3, los estudiantes debían determinar los elementos de la parábola, esto con el fin de trabajar en el registro gráfico; a partir de la representación semiótica de la parábola en el registro r^3, la tarea consistía en hallar la distancia focal, ecuaciones de la directriz, eje de simetría y longitud del lado recto, las coordenadas del foco y vértice. Al respecto, los estudiantes no comprendieron bien la tarea y lo que hicieron fue ubicar los elementos en la gráfica, una evidencia de esto se muestra en la Figura 10, por tanto se concluye que los estudiantes no realizaron la tarea de $T: r^3$, porque como lo argumenta Duval (2006) existen dos tipos de tratamiento, el de forma discursiva que hace referencia a la deducción valida de las propiedades, condiciones dadas o de los teoremas donde es necesario hacer uso de un lenguaje y el otro se da de forma visual a través de otras reorganizaciones de las formas; en este caso no logran identificar de forma visual los elementos de la parábola dada su gráfica; sin embargo, en la socialización de esta tarea los estudiantes comprendieron cual era la finalidad.

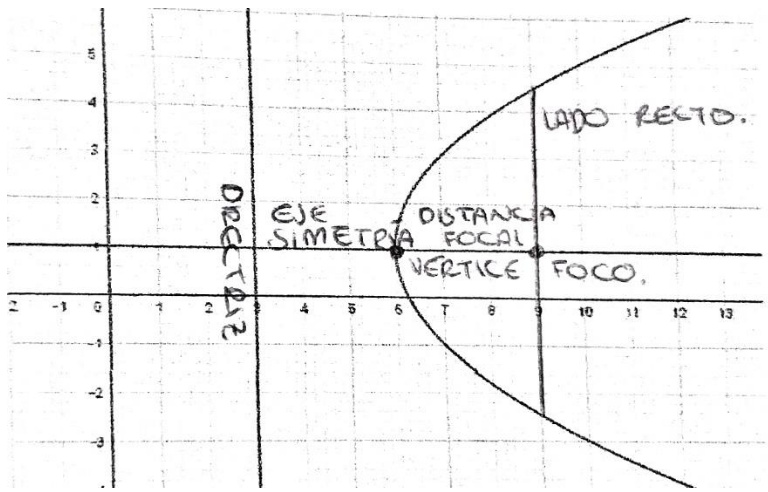


Figura 10. Respuesta del estudiante E4 a la actividad 3 de la estrategia 3, Anexo 4.

Por otro lado, en la actividad 4, se les presentaron a los estudiantes de forma verbal algunas condiciones de una parábola para que la representaran gráficamente; en esta situación se observó que los estudiantes realizaron dos tipos de representación semiótica en el registro gráfico, un caso es cuando la parábola abre hacia la derecha y el otro cuando abre hacia la izquierda, estos dos casos cumplen con las condiciones dadas, como se observa en la Figura 11. Todos los estudiantes lograron hacer la actividad $C: r^1 \rightarrow r^3$ (pasar del registro verbal al registro gráfico), es decir representaron la parábola a partir de las condiciones dadas.

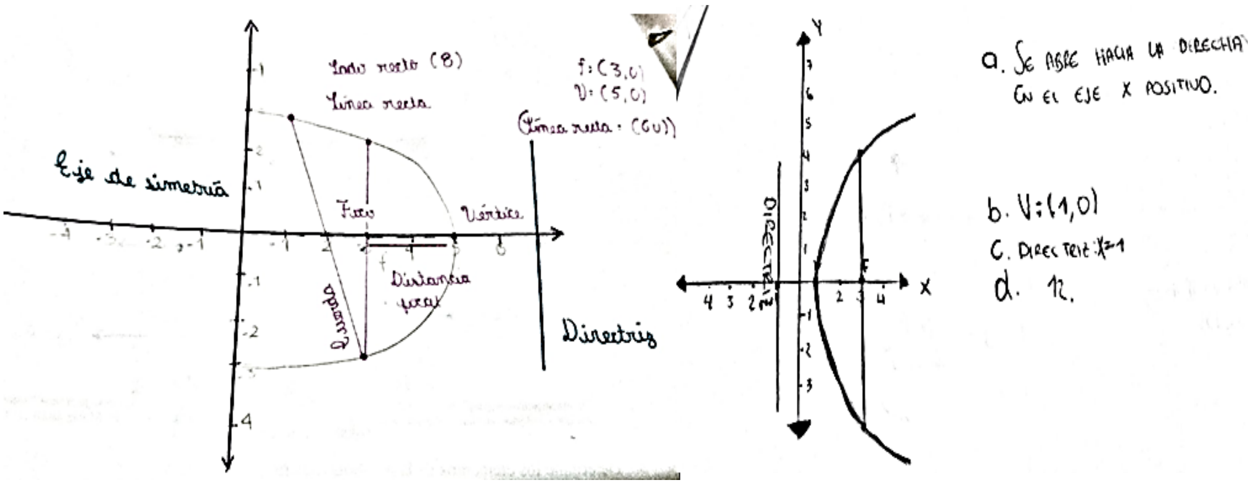


Figura 11. Respuesta de los estudiantes E6 y E4 respectivamente a la actividad 4 de la estrategia 3, Anexo 4.

En la cuarta estrategia ver Anexo 5, se pretendió que los estudiantes trabajaran en el r^2, desarrollaran las actividades: $C\colon r^1 \to r^2$, $C : r^2 \to r^1$, $C\colon r^3 \to r^2$, $C\colon r^2 \to r^3$. Para esto, primero se presentaron unos ejemplos con su desarrollo paso a paso, con el fin de que los estudiantes analizaran cual es el proceso, seguidamente se socializó el análisis realizado por cada estudiante, con el objetivo de comunicar en forma verbal los procedimientos para hallar la ecuación general y canónica, la representación gráfica y describir el objeto matemático.

En la socialización se evidenció que la mayoría de los estudiantes comprendieron el proceso de cada ejemplo, sin embargo, algunos estudiantes presentaron dificultad en hallar la ecuación canónica de la parábola a partir de su ecuación general, esto porque los estudiantes no poseían los conocimientos previos de trinomio cuadrado perfecto y presentaban dificultades en la factorización.

Luego de la socialización, los estudiantes debían desarrollar los ejercicios propuestos en la estrategia; en el primer ejercicio debían hallar la ecuación canónica de la parábola a partir de su ecuación general, con este ejercicio se buscó que los estudiantes trabajaran en la actividad $T\colon r^2$, según el desempeño, se pudo constatar que hay dificultad en realizar procesos de factorización tal como se muestra en la Figura 12, esto hizo que los estudiantes no hallaran correctamente la ecuación canónica de la parábola y por tanto no desarrollaran la actividad de tratamiento en el registro algebraico.

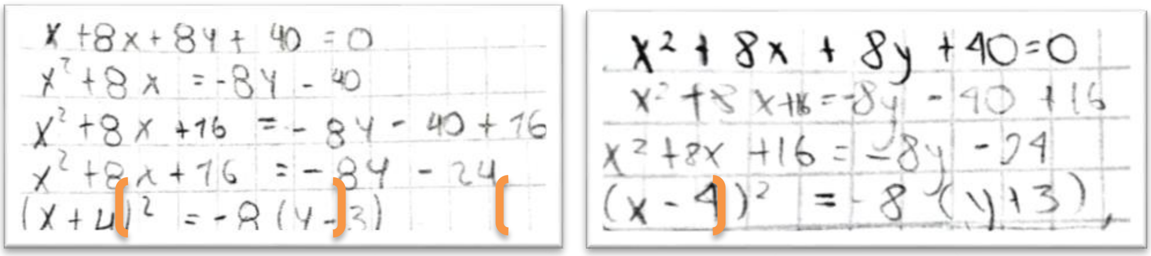


Figura 12. Respuesta de los estudiantes E4 y E5 respectivamente a la actividad 2.1 de la estrategia 4, Anexo 5.

Por otro lado, hay estudiantes que realizaron correctamente los procedimientos para hallar la ecuación canónica de la parábola, lo cual indica que sí lograron desarrollar la actividad $T: r^2$, porque trabajaron al interior del registro algebraico. En este caso, a partir de una representación semiótica en r^2 de la parábola la transformaron en otra representación, una evidencia de lo expuesto anteriormente se muestra en la Figura 13.

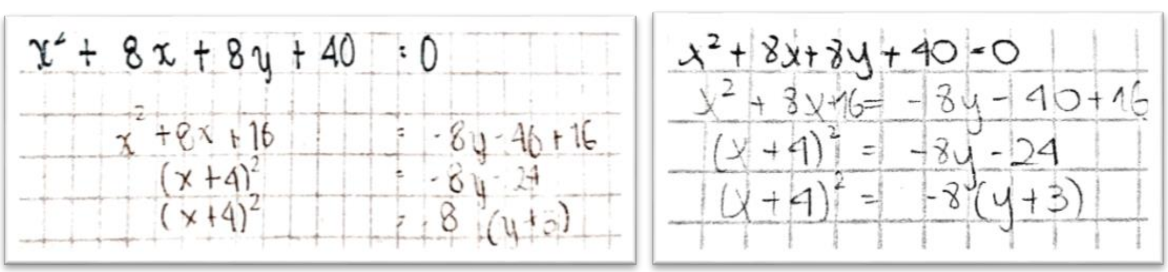


Figura 13. Respuesta de los estudiantes E6 y E1 respectivamente a la actividad 2.1 de la estrategia 4, Anexo 5.

Seguidamente, los estudiantes debían describir la parábola a partir de su ecuación general, para esto debían transformar la ecuación canónica a la general para así identificar hacia donde abría la parábola y luego determinar los elementos de esta; con este ejercicio se buscaba que los estudiantes desarrollaran la actividad $C: r^1 \rightarrow r^2$. En el desarrollo de este ejercicio se identificó que los estudiantes realizaron correctamente procedimientos en el interior del registro algebraico para luego de forma verbal describirla, pero al describir el lugar geométrico algunos estudiantes cometieron errores, esto ocurrió porque no hallaron correctamente sus elementos; a pesar de identificar que la parábola abre hacia la derecha, al hallar el foco lo ubicaron como si esta abriera hacia arriba. Otro caso, es que no tuvieron en cuenta el valor de p para encontrar la ecuación de la directriz, por tanto no hubo un desarrollo de la actividad $C: r^1 \rightarrow r^2$. Una ilustración de esta situación se presenta en la Figura 14.

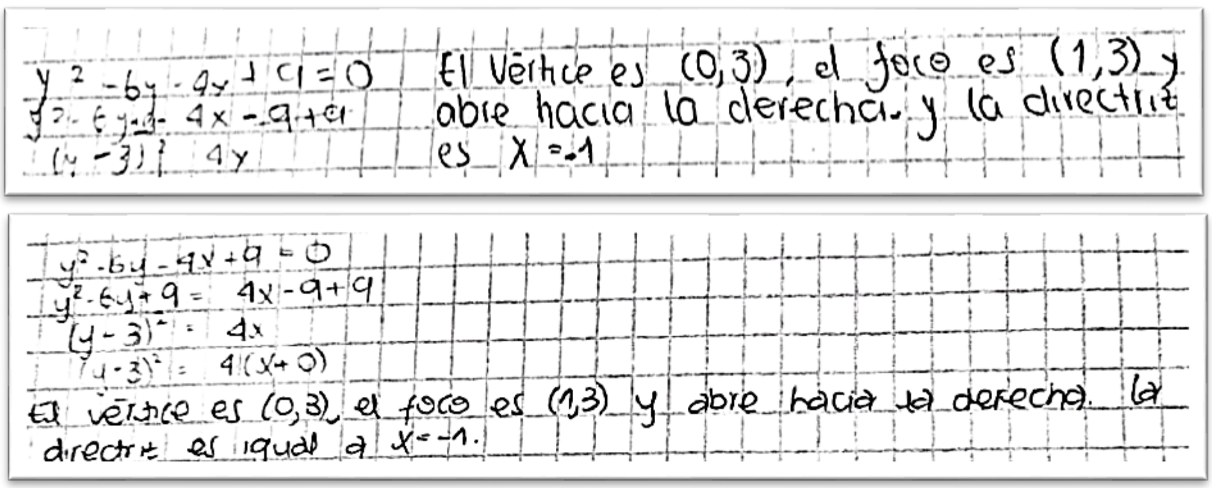


Figura 14. Respuesta de los estudiantes E4 y E5 respectivamente a la actividad 2.2 de la estrategia 4, Anexo 5.

Es de anotar, que algunos estudiantes hallaron la ecuación canónica de la parábola y además describieron correctamente de forma verbal este objeto, tal como se muestra en la Figura 15; en conclusión, realizaron la actividad de conversión ya que pasaron del registro algebraico al verbal.

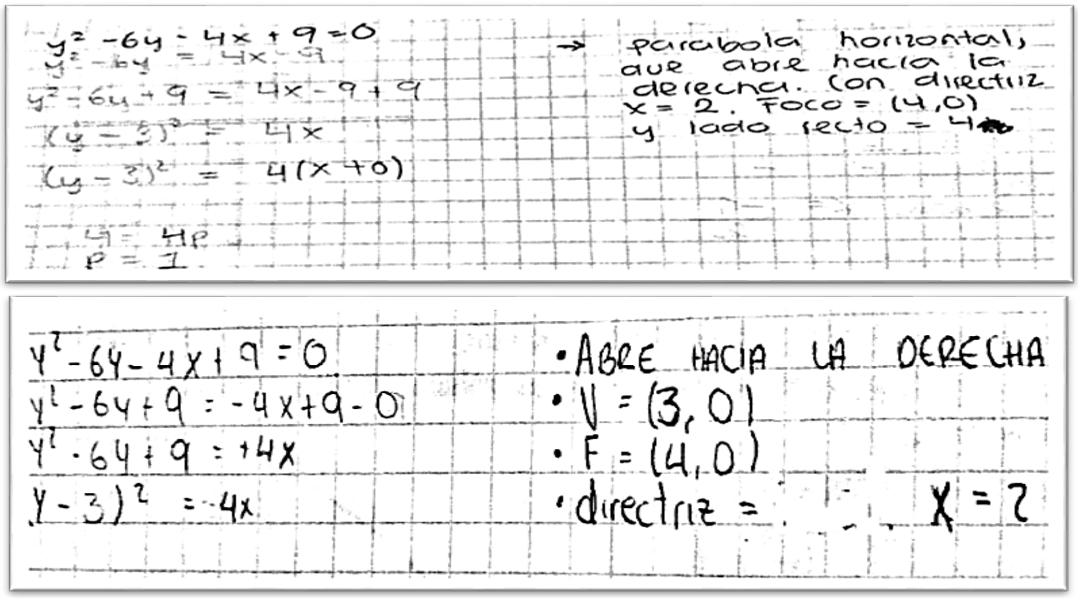


Figura 15. Respuesta de los estudiantes E2 y E4 respectivamente a la actividad 2.2 de la estrategia 4, Anexo 5.

Posteriormente, los estudiantes debían encontrar la ecuación general de la parábola a partir de la representación semiótica en r^3, esto con el fin de trabajar la actividad $C\colon r^3 \to r^2$, para esto, debían extraer de la representación gráfica los elementos e identificar la representación semiótica de la parábola en el registro r^2 de acuerdo a la orientación de esta; además, debían pasar de la ecuación canónica a la general.

En el proceso desarrollado por los estudiantes se detectó que algunos lograron extraer la información de la gráfica e identificar la ecuación de la parábola de acuerdo a la representación, pero no realizaron el proceso algebraico para determinar la ecuación general, es decir encontraron la ecuación canónica de esta, pero no la pasaron a su forma general, una evidencia de lo mencionado anteriormente se observa en la Figura 16; de ahí se puede concluir que estos estudiantes no lograron realizar la actividad $C\colon r^3 \to r^2$, porque no pasaron del registro gráfico al algebraico.

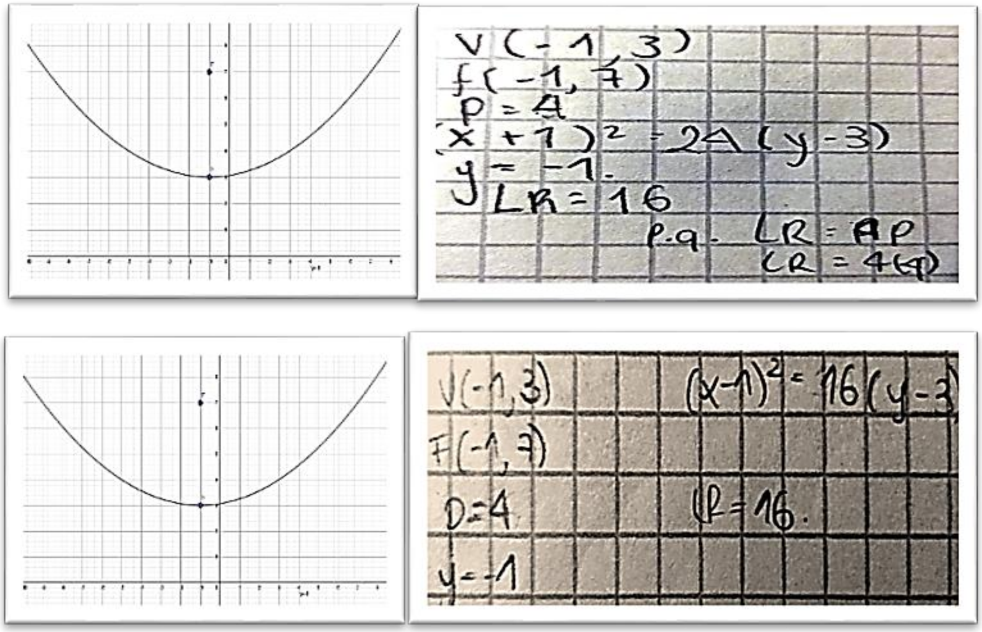


Figura 16. Respuesta de los estudiantes E1 y E4 respectivamente a la actividad 2.3 de la estrategia 4, Anexo 5.

Mientras que, los demás estudiantes lograron extraer la información de la gráfica, identificar la ecuación canónica de acuerdo a su representación y hallar la ecuación general de la parábola, tal como se evidencia en la Figura 17, esto indica que lograron desarrollar la actividad $C: r^3 \rightarrow r^2$, es decir realizaron la conversión del registro gráfico al algebraico.

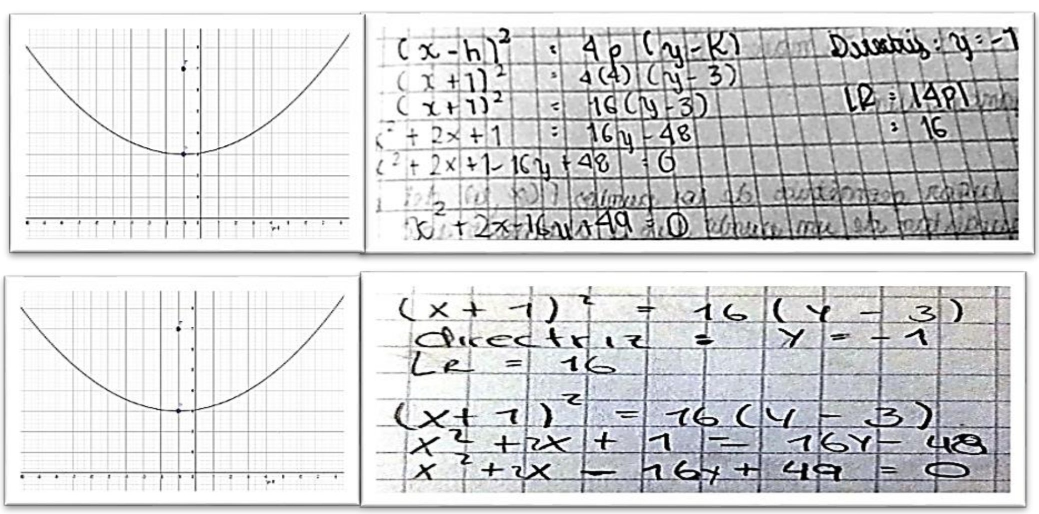


Figura 17. Respuesta de los estudiantes E6 y E4 respectivamente a la actividad 2.3 de la estrategia 4, Anexo 5.

Enseguida, los estudiantes debían hallar la ecuación general de la parábola a partir de las condiciones dadas (vértice y foco), el objetivo con este ejercicio fue que los estudiantes realizaran la actividad $C: r^1 \rightarrow r^2$; en el proceso desarrollado por los estudiantes se pudo identificar que utilizaron la ecuación canónica de la parábola cuando abre hacia abajo, pero algunos de ellos no tuvieron en cuenta el signo menos el cual indica en la ecuación que abre hacia abajo (omitieron este signo) un ejemplo de esto se muestra en la Figura 18, esto hace que no encuentren la ecuación general, por tanto no hubo un desarrollo de la actividad de conversión del registro verbal al algebraico.

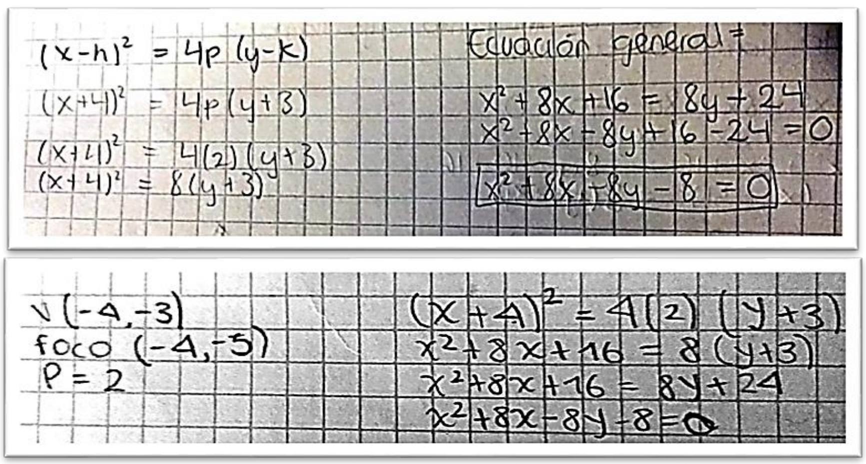


Figura 18. Respuesta de los estudiantes E2 y E5 respectivamente a la actividad 2.4 de la estrategia 4, Anexo 5.

No obstante, se evidenció que hubo estudiantes que sí lograron hallar la ecuación general a partir de las condiciones dadas de forma verbal, identificaron la ecuación canónica a trabajar, reemplazaron los valores dados, hallaron la distancia focal (p) y desarrollaron correctamente procesos algebraicos para determinar la ecuación canónica, ver Figura 19. Esto indica que los estudiantes realizaron la actividad $C: r^1 \rightarrow r^2$.

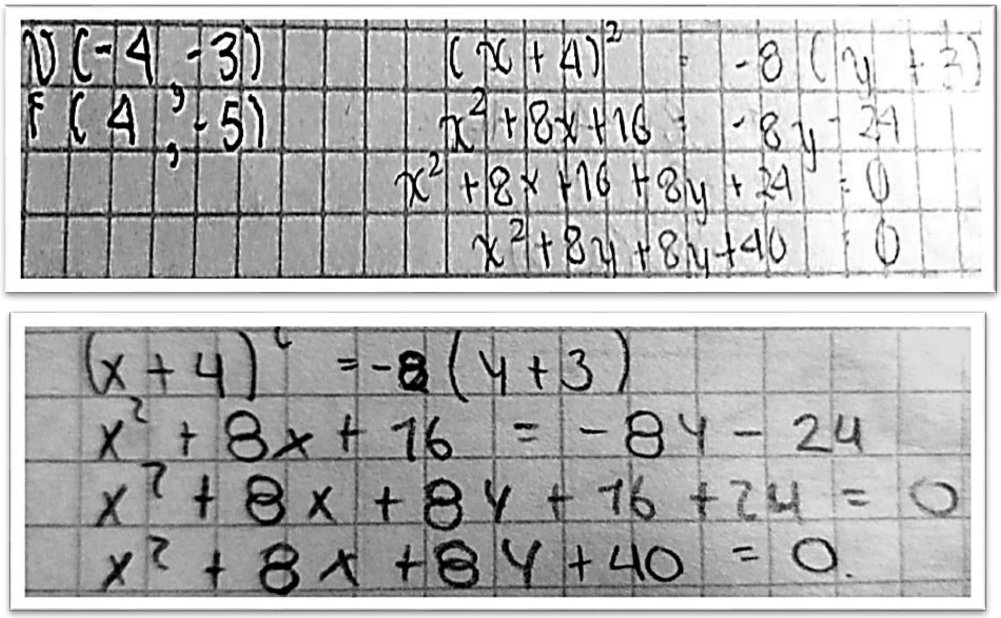


Figura 19. Respuesta de los estudiantes E6 y E4 respectivamente a la actividad 2.4 de la estrategia 4, Anexo 5.

Después, los estudiantes debían realizar la representación semiótica de la parábola en el registro gráfico a partir de su ecuación general, en el proceso se pudo evidenciar que todos realizaron la actividad $C: r^2 \rightarrow r^3$, ya que lograron ejecutar procesos algebraicos para determinar la ecuación canónica de la parábola a partir de la ecuación general y así pudieron establecer los elementos para realizar la representación gráfica de dicha parábola, ver Figura 20. De este hecho, se concluye que los estudiantes lograron desarrollar la actividad de conversión del registro algebraico al gráfico.

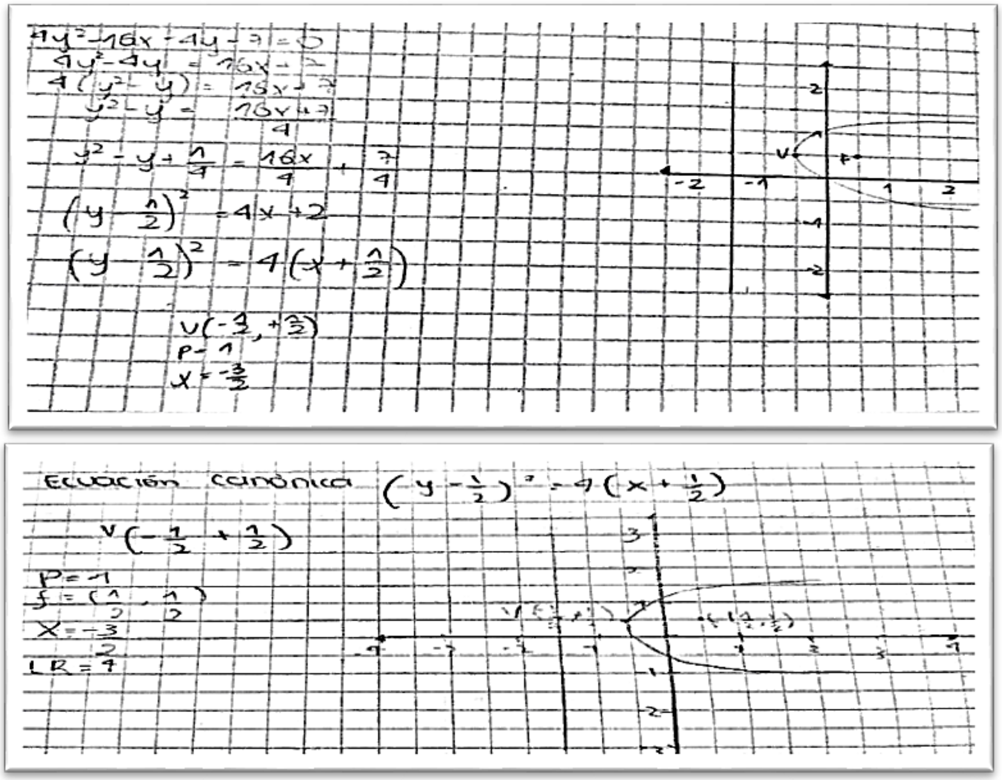


Figura 20. Respuesta de los estudiante E1 y E2 respectivamente a la actividad 2.5 de la estrategia 4, Anexo 5.

Finalmente, se propuso una situación problema sobre la parábola con el fin de trabajar la actividad $C: r^1 \to r^2 \to r^3$; se constató que los estudiantes no lograron dar solución a esta situación, esto se da porque no realizaron una representación y no plantearon la ecuación que describía la situación para poder realizar procesos algebraicos y llegar a su solución; sin embargo, algunos estudiantes representaron la gráfica de la situación pero no realizaron ningún otro procedimiento, estas situaciones se pueden observar en la Figura 21, de ahí se concluye que los estudiantes no lograron realizar la actividad de conversión del registro verbal al algebraico haciendo uso del registro gráfico.

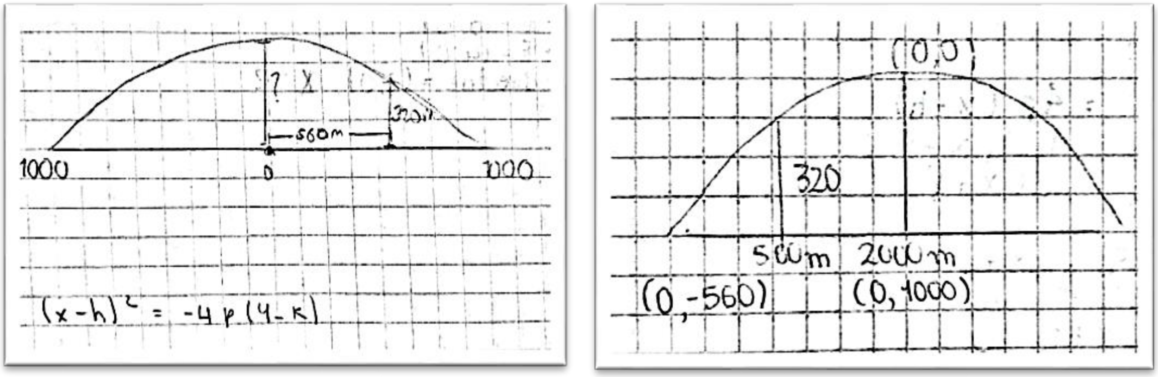
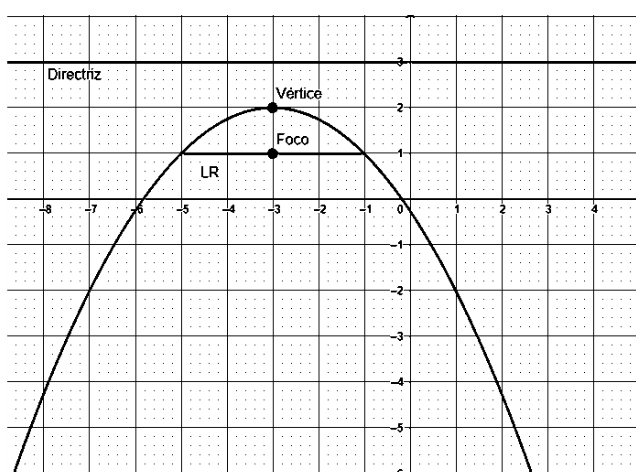


Figura 21. Respuesta de los estudiantes E4 y E6 respectivamente a la actividad 2.6 de la estrategia 4, Anexo 5.

5.2 Solución plausible del cuestionario

En la siguiente tabla se presenta una solución plausible de cada una de las tareas del cuestionario del anexo 1, como referencia para el análisis del desempeño de cada estudiante.

Tabla 8. *Solución actividades del cuestionario*

Tarea	Solución de la tarea
1	Una parábola es un conjunto de puntos (h,k) equidistante de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz; lugar geométrico y sección cónica resultante al realizar un corte paralelo a la generatriz a un cono recto.
2	$y^2+10y-16x+9=0$ $y^2+10y+25=16x-9+25$ $(y+5)^2=16(x+1)$
3	

4

$$y^2 - 6y - 12x - 3 = 0$$

$$y^2 - 6y + 9 = 12x + 3 + 9$$

$$(y-3)^2 = 12x + 12$$

$$(y-3)^2 = 12(x+1)$$

La ecuación $y^2 - 6y - 12x - 3 = 0$ representa una parábola que abre hacia la derecha con vértice $(-1,3)$, foco $(2,3)$, su lado recto mide 12 y la directriz tiene por ecuación $x = -4$

5

$$(x-h)^2 = -4p(y-k)$$

$$(x-3)^2 = -4(2)(y-4) \rightarrow \text{ecuación canónica}$$

$$(x-3)^2 = -8(y-4)$$

$$x^2 - 6x + 9 = -8y + 32$$

$$x^2 - 6x + 9 + 8y - 32 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8y - 23 = 0 \rightarrow \text{ecuación general}$$

Ecuación de la directriz $y = 6$

Longitud del lado recto $LR = 8$

6

$$(y-3)^2 = 4(3)(x+4)$$

$$y^2 - 6y + 9 = 12x + 48$$

$$y^2 - 6y + 9 - 12x - 48 = 0$$

$$y^2 - 6y - 12x - 39 = 0 \rightarrow \text{Ecuación general}$$

7

$$4y^2 - 48x - 20y = 71$$

$$4y^2 - 20y = 48x + 71$$

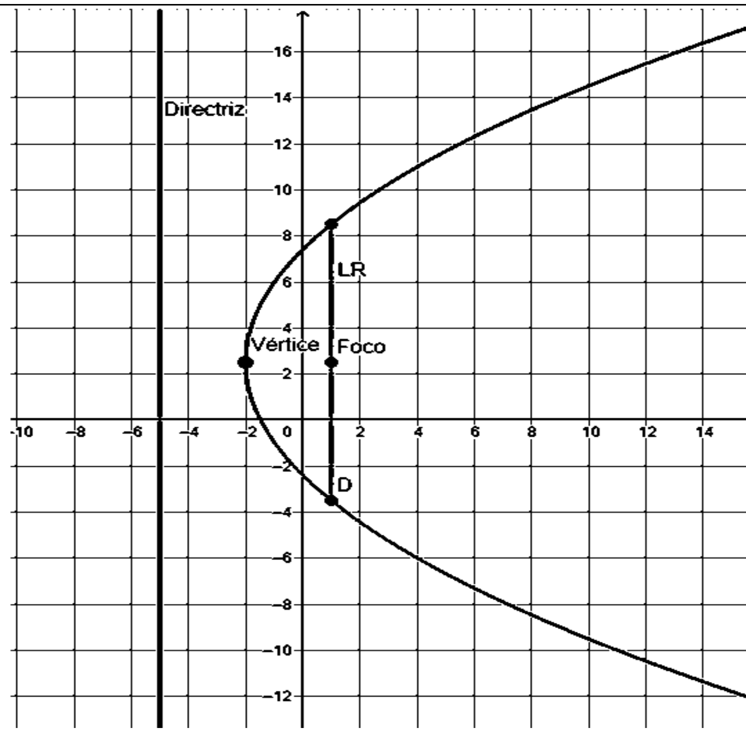
$$4\left(y^2 - 5y + \frac{25}{4}\right) = 48x + 71 + 25$$

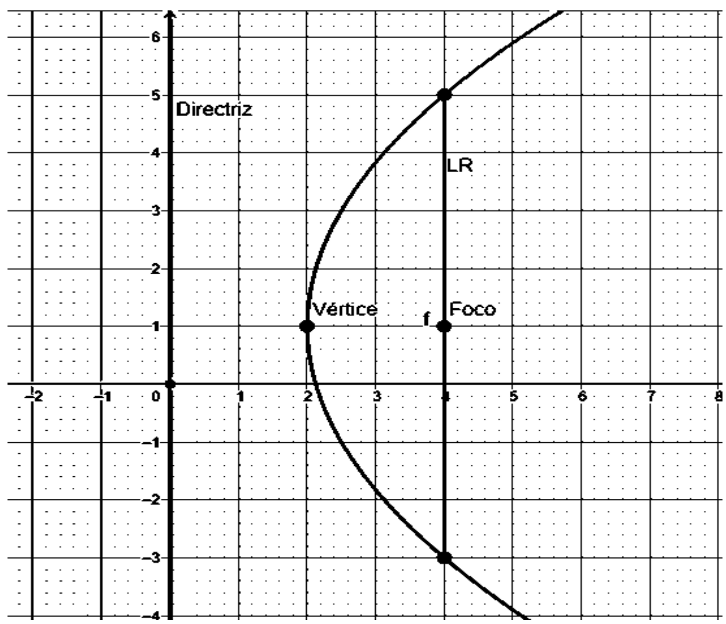
$$\left(y^2 - 5y + \frac{25}{4}\right) = \frac{48x + 96}{4}$$

$$\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 12x + 24$$

$$\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 12(x+2)$$

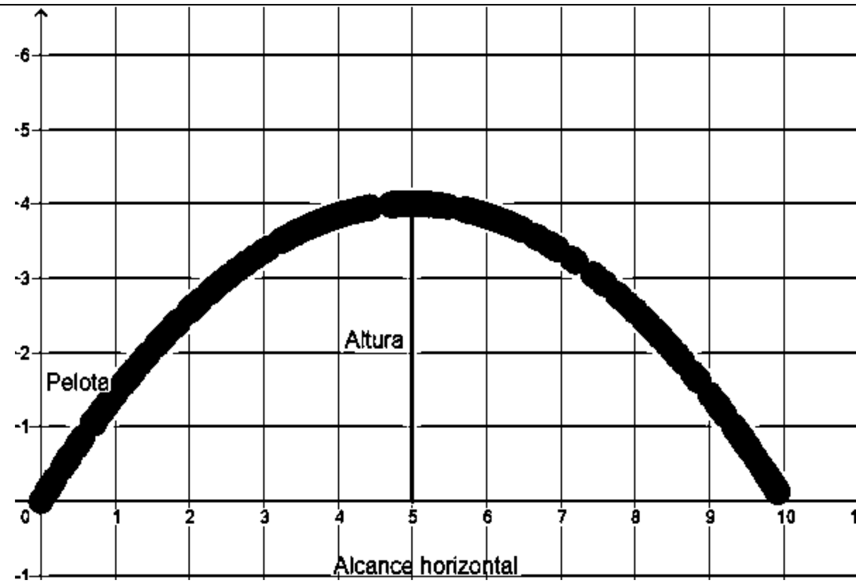
A partir de la ecuación canónica de la parábola se deduce que las coordenadas de su vértice es $\left(-2, \frac{5}{2}\right)$, foco $\left(1, \frac{5}{2}\right)$, directriz $x = -5$ y la longitud del lado recto es $LR = 12$



8 

9 Es una parábola que abre hacia la izquierda con vértice $(6,1)$, foco $(4,1)$, ecuación de la directriz $x = 8$ y la longitud de su lado recto es 8.

10 La trayectoria que describe la pelota es de forma parabólica, como se muestra a continuación.



$$x^2 - 10x + \frac{25}{4}y = 0$$

$$x^2 - 10x = -\frac{25}{4}y$$

$$x^2 - 10x + 25 = -\frac{25}{4}y + 25$$

$$(x-5)^2 = -\frac{25}{4}(y-4)$$

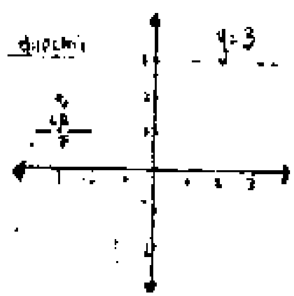
El vértice (5,4) representa el punto más alto de la parábola, por lo cual se concluye que su altura máxima es 4 metros y su alcance horizontal es 10 metros.

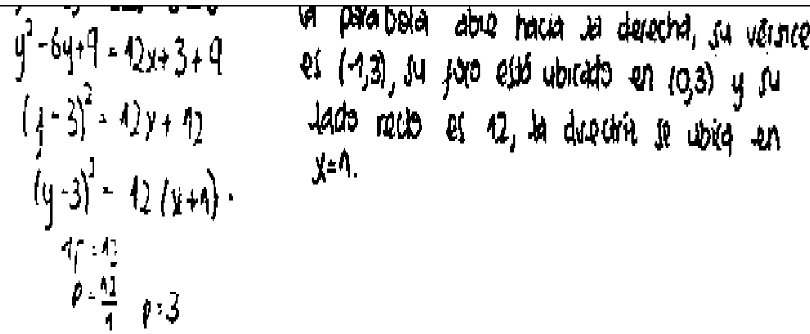
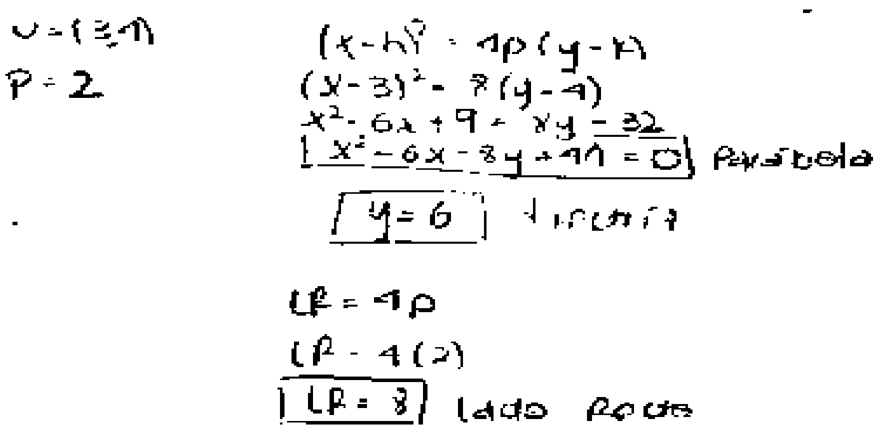
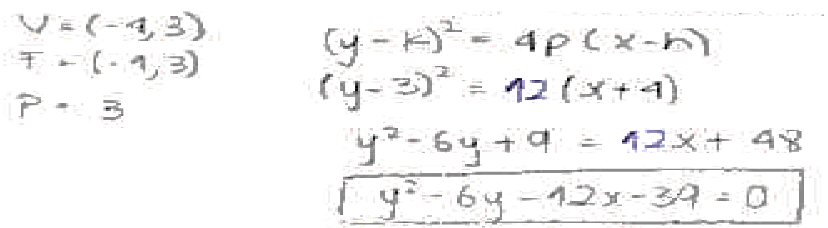
5.3 Análisis de la solución dada por cada estudiante

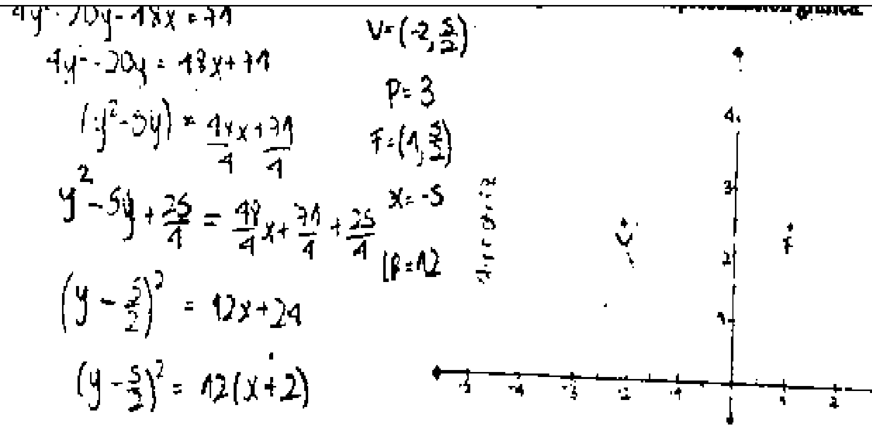
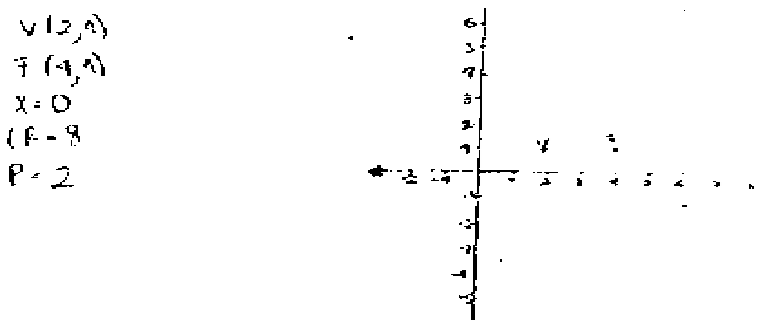
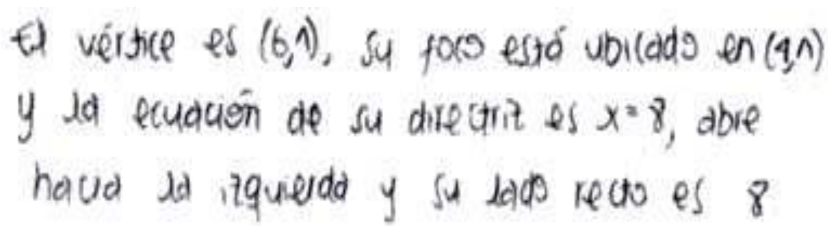
A continuación, se presenta el análisis de la solución dada por cada Estudiante. En las tablas 8, 9, 10, 11, 12 y 13 aparecen el número de la actividad, las respuestas dadas y la descripción del desempeño obtenido en cada una de las actividades que se le plantearon.

5.3.1 Análisis de la solución del estudiante E1

Tabla 9. *Respuestas y análisis del desempeño del estudiante E1 en las actividades de tratamiento y conversión*

Tarea	Respuestas	Desempeño
1	Es un conjunto de puntos que cada punto equidista tanto de la directriz como del foco.	Realizó correctamente la descripción del lugar geométrico parábola, es decir ejecutó actividades de tratamiento en el interior del registro verbal.
2	$y^2+10y-16x+9=0$ $y^2+10y+25=16x-9+25$ $(y+5)^2=16x+16$ $(y+5)^2=16(x+1)$	Realizó actividad de tratamiento en el registro algebraico debido a que encontró de forma correcta la ecuación canónica de la parábola a partir de su ecuación general.
3	 $(x+3)^2=-4(y-2)$ $V(-3,+2)$ $-4=4p$ $\frac{-4}{4}=p$ $-1=p$	Representó de forma incorrecta el lado recto de la parábola, por ende no realizó correctamente la representación gráfica de la parábola a partir de su ecuación canónica, es decir, presentó dificultad en la actividad de tratamiento en el registro gráfico.

4		Describió de forma incorrecta la parábola, debido a que no enunció de forma adecuada las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz, por tal motivo presentó dificultad en la actividad de conversión del registro algebraico al verbal.
5		Determinó de forma incorrecta la ecuación general de la parábola, pero halló correctamente la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto, se concluye que realizó correctamente la actividad de conversión del registro gráfico al algebraico.
6		Plasmó adecuadamente la ecuación general de la parábola que cumple con las condiciones dadas, es decir realizó la actividad de conversión del registro verbal al registro algebraico.

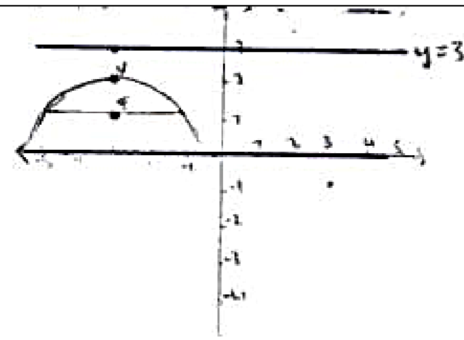
<table>
<tr><td>7</td><td>
</td><td>De forma algebraica halló acertadamente los elementos de la parábola a partir de su ecuación general y así mismo representó correctamente dicha parábola, por lo cual realizó la actividad de conversión del registro algebraico al gráfico.</td></tr>
<tr><td>8</td><td>
</td><td>Representó correctamente la gráfica del objeto matemático parábola a partir de las condiciones dadas, por tal razón realizó la actividad de conversión del registro verbal al registro gráfico.</td></tr>
<tr><td>9</td><td>
</td><td>A partir de la gráfica de la parábola el estudiante describió correctamente los elementos de esta, por ende, realizó la actividad de conversión del registro gráfico al verbal.</td></tr>
</table>

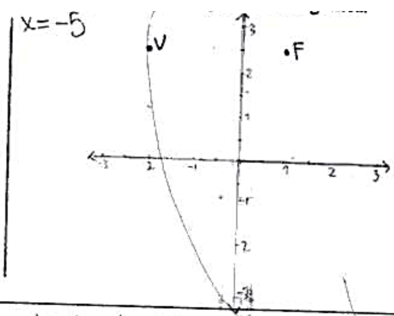
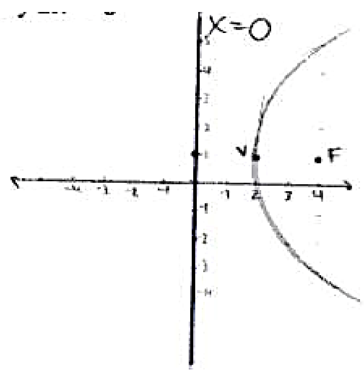
10	$x^2-10x+\frac{25}{4}y=0$ $x^2-10x+25=\frac{25}{4}y+25$ $(x-5)^2=\frac{25}{4}(y+4)$ $V(5,-4)$ la altura máxima es 5 metros y el máximo alcance horizontal es 8.	El estudiante no realizó la representación gráfica para ilustrar la situación problema, comete errores en el proceso algebraico para hallar la altura máxima y el máximo alcance horizontal que alcanza la pelota, así pues, no logró realizar la actividad del registro verbal al registro algebraico involucrando el registro gráfico.

5.3.2 Análisis de la solución del estudiante E2

Tabla 10. *Respuestas y análisis del desempeño del estudiante E2 en las actividades de tratamiento y conversión*

Tarea	Respuestas	Desempeño
1	lugar geométrico compuesto por todos aquellos puntos que equidistan de un punto fijo y una linea recta llamada directriz	Describió de forma correcta el lugar geométrico parábola, por tanto realizó la actividad de tratamiento en el registro verbal.
2	$y^2+10y=16x-9$ $(y^2+10y+25)=16x-9+25$ $(y+5)^2=16x+16$ $(y+5)^2=16(x+1)$	A partir de la ecuación general el estudiante encontró la ecuación canónica de esta, así pues, realizó la actividad de tratamiento en el registro algebraico.

3		El estudiante a partir de la ecuación canónica de la parábola logró realizar su representación gráfica, por tanto realizó correctamente la actividad de tratamiento en el registro gráfico.
4	$y^2 - 6y = 12x + 3$ $y^2 - 6y + 9 = 12x + 3 + 9$ $\boxed{(y-3)^2 = 12(x+1)}$ Parábola horizontal, que abre hacia la derecha. Con vertice (-1;3), directriz $x = -4$, foco (2,3) y lado recto = 12u.	El estudiante realizó la actividad de tratamiento en el registro algebraico, ejecutó la actividad de conversión de dicho registro al verbal, ya que describió de forma verbal el lugar geométrico que representa la ecuación dada.
5	$(x-3)^2 = -8(y-4)$ directriz = $y = 6$ lado recto = 8u $x^2 - 6x + 9 = -8y + 32$ $x^2 - 6x + 8y - 23 = 0$	A partir de la gráfica el estudiante encontró correctamente la ecuación general de la parábola, la directriz y la longitud del lado recto, por ende realizó correctamente la actividad de conversión del registro grafico al algebraico.

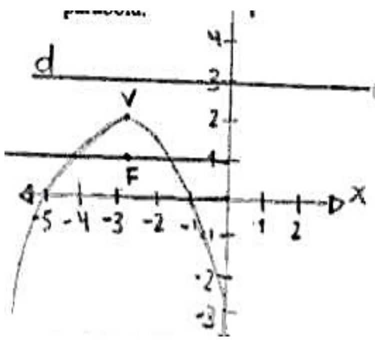
6	$(y+4)^2 = 12(x-3)$ $y^2+8y+16 = 12x-36$ $\boxed{y^2+8y-12x+52=0}$	El estudiante a partir de las condiciones dadas realizó procesos algebraicos para determinar la ecuación general de la parábola, pero no reemplazó correctamente las coordenadas del vértice en la ecuación, lo cual indica que no ejecutó la actividad de conversión del registro verbal al algebraico.
7	$4y^2-20y = 48x+71$ $4(y^2-5y+\frac{25}{4}) = 48x+71+25$ $4(y-\frac{5}{2})^2 = 48x+96$ $(y-\frac{5}{2})^2 = 12x+24$ $\boxed{(y-\frac{5}{2})^2 = 12(x+2)}$  $12=4p$ $\boxed{p=3}$ Vertice $(-2,\frac{5}{2})$ Foco $(1,\frac{5}{2})$ directriz: $x=-5$ lado recto $=12u$	Dada la ecuación general de la parábola, el estudiante determinó los elementos e hizo correctamente la representación gráfica de dicha parábola, por tal razón realizó correctamente la actividad de conversión del registro algebraico al gráfico.
8		A partir de las condiciones dadas el estudiante representó gráficamente los elementos de la parábola y a partir de estos trazó la gráfica de dicho objeto, por consiguiente, realizó la actividad de conversión del registro verbal al gráfico.

9	Vértice (6,1) Foco (4,1) directriz: x = 8 > canónica = $(y-1)^2 = -8(x-6)$ > general $y^2-2y+1=-8x+48$ $y^2-2y+8y-47=0$	Desde la representación gráfica de la parábola el estudiante no hizo uso de un lenguaje verbal para la descripción de dicho objeto, se centró en nombrar los elementos, por ende, no realizó la actividad de conversión del registro gráfico al verbal.
10	$x^2-10x=-\frac{25}{4}y$ $x^2-10x+25=-\frac{25}{4}y+25$ $(x-5)^2=-\frac{25}{4}y+25$ $(x-5)^2=-\frac{25}{4}(y-4)$ Vértice(5,4) → alt. max = 4m → alcance horizontal 10m	Desde la situación problema el estudiante logró encontrar correctamente su solución, no hizo la representación gráfica para ilustrar la información dada, pero si realizó adecuadamente los procesos algebraicos necesarios para la solución, es decir, realizó la actividad de conversión del registro verbal al algebraico sin involucrar el registro gráfico.

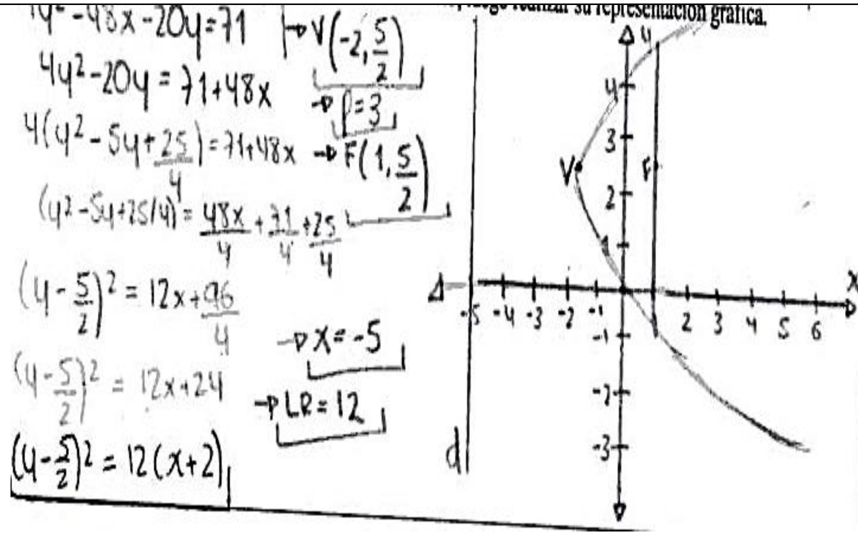
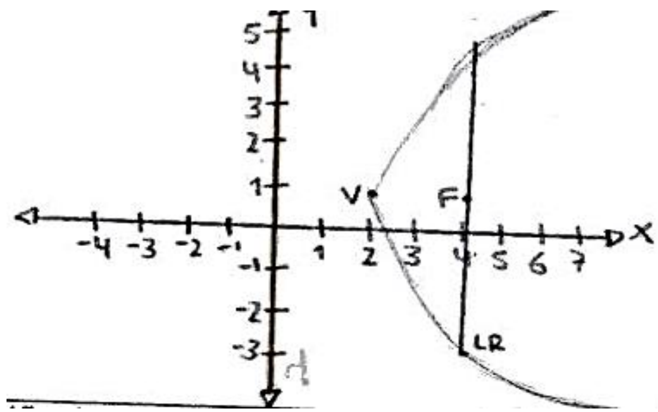
5.3.3 Análisis de la solución del estudiante E3

Tabla 11. *Respuestas y análisis del desempeño del estudiante E3 en las actividades de tratamiento y conversión*

Tarea	Respuestas	Desempeño

1	Es un lugar geométrico en el que los puntos estan ubicados a la misma distancia del eje de simetrío, está compuesta por el vértice, el foco, la directriz y el lado recto.	El estudiante realizó una descripción incompleta del lugar geométrico parábola, por tanto no está desarrollado en su totalidad la actividad de tratamiento en el registro verbal.
2	$y^2+10y-16x+9=0$ $y^2+10y+25=16x-9+25$ $(y+5)^2=16x+16$ $(y+5)^2=16(x+1)$ Rta: $(y+5)^2=16(x+1)$	A partir de la ecuación general de la parábola el estudiante logró determinar la ecuación canónica de esta, lo cual indica que ejecutó correctamente la actividad de tratamiento en el registro algebraico.
3	 $(x+3)^2=-4(y-2)$ → $V(-3,2)$ → $4p=-4$ → $y=3$ $p=\frac{-4}{4}$ → $F(-3,1)$ $p=-1$ → $LR=4p$ $LR=\|4\|$	Desde la ecuación canónica de la parábola el estudiante logró hacer correctamente la representación gráfica de este objeto, ósea desarrolló adecuadme la actividad de tratamiento en el registro gráfico.

4	$y^2-6y+9=12x+3+9$ $(y-3)^2=12x+12$ $\boxed{(y-3)^2=12(x+1)}$ $\to V(-1,3)$ $\to 4p=12$ $p=\frac{12}{4}$ $\boxed{p=3}$ $\to \boxed{x=2}$ $\to LR=4p$ $LR=4(3)$ $\boxed{LR=12}$ $\to F(-4,3)$ → Abre hacia la derecha.	El estudiante desarrolló procesos algebraicos para encontrar los elementos de la parábola, pero mencionó de forma incorrecta dichos elementos, además no realizó una descripción verbal de este objeto matemático por lo cual no hizo la actividad de conversión del registro algebraico al verbal.
5	$\to V(3,4)$ $\to F(3,2)$ $\to \boxed{p=-2}$ $\to LR=4p$ $LR=4(-2)$ $\boxed{LR=8}$ $\to \boxed{y=6}$ $\cdot\ (x-3)^2=-8(y-4)$ $x^2-6x+9=-8y+32$ $x^2-6x+9+8y-32=0$ $x^2-6x+8y-23=0$ $*\ \boxed{x^2-6x+8y-23=0}$	Se le presento al estudiante la representación gráfica de una parábola con la ubicación de algunos elementos y él a partir de estos logró realizar procesos algebraicos para hallar la ecuación general de dicho objeto, es decir, realizó la actividad de conversión del registro grafico al algebraico.
6	$V(-4,3)$ $F(-1,3)$ $\boxed{p=3}$ $\boxed{x=-7}$ $(y-3)^2=12(x+4)$ $y^2-6y+9=12x+48$ $y^2-6y+9-12x-48=0$ $y^2-6y-12x-39=0$ $\boxed{y^2-6y-12x-39=0}$	Al enunciar de forma verbal algunos elementos de la parábola el estudiante determinó la ecuación general a partir de las condiciones dadas, lo cual indica que realizó de forma correcta la actividad de conversión del registro verbal al registro algebraico.

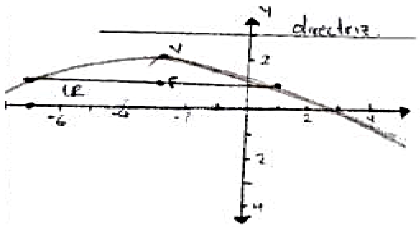
7		A partir de la ecuación general de la parábola el estudiante determinó de forma correcta los elementos de esta y así pudo representar gráficamente dicho objeto, de ahí que, desarrolló correctamente la actividad de conversión del registro algebraico al registro gráfico.
8		Haciendo uso de un lenguaje verbal se le dieron al estudiante los elementos de una parábola, el a partir de estos logró realizar la representación gráfica de este objeto matemático, de manera que, desarrolló adecuadamente la actividad de conversión del registro verbal al registro gráfico.

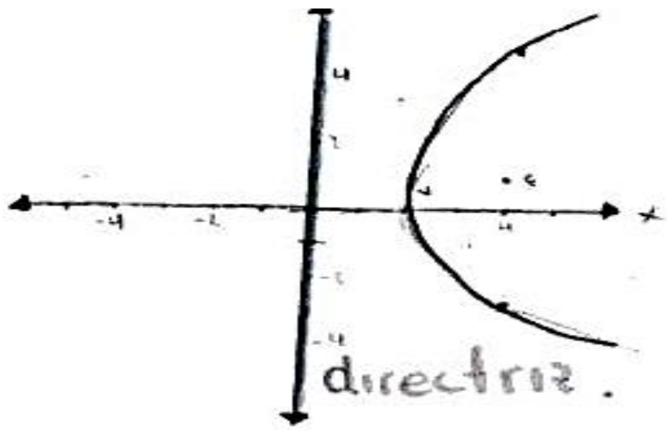
9	$V(6,1)$ $F(4,1)$ $x=8$ $p=-2$ El vertice es $(6,1)$, el foco $(4,1)$, la directriz $x=8$ y $p=-2$. la parábola abre hacia la izquierda. Su ecuación general es $y^2-2y+8x-47=0$, su ecuación canónica es $(y-1)^2=-8(x-6)$	A partir de la gráfica el estudiante logró describir de forma verbal los elementos de la parábola, lo cual indica que realizó actividad de conversión del registro grafico al verbal.
10	$x^2-10x+\frac{25}{4}y=0$ x^2	Dada la situación problema sobre el objeto matemático parábola el estudiante no consiguió resolver dicha situación, por tanto, no hubo desarrollo de la actividad de conversión del registro verbal al algebraico involucrando el grafico.

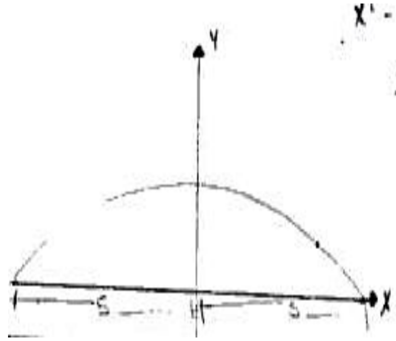
5.3.4 Análisis de la solución del estudiante E4

Tabla 12. *Respuestas y análisis del desempeño del estudiante E4 en las actividades de tratamiento y conversión*

Tarea	Respuestas	Desempeño
1	UNA PARÁBOLA ES UN LUGAR GEOMÉTRICO, CUYA CARACTERÍSTICA ES QUE HAY LA MISMA DISTANCIA DEL FOCO AL VÉRTICE, QUE DEL VÉRTICE A LA DIRECTRIZ	El estudiante no describió de forma correcta el lugar geométrico parábola lo cual indica que no realiza adecuadamente la actividad de tratamiento en el registro verbal.

2	$y^2+10y-16x+9=0$ $y^2+10y+25=-16x-9+25$ $y^2+10y+25=-16x+16$ $(y+5)^2=-16(x-1)$ $(y+5)^2=-16(x-1)$ ECUACIÓN CANÓNICA.	Dada de forma algebraica una parábola al estudiante, este cometió errores en hallar la ecuación canónica de dicha parábola; trabajó en el interior del registro algebraico pero no de forma correcta, es decir, que presentó dificultades en la actividad de tratamiento en el registro algebraico.
3	 $(x+3)^2=-4(y-2)$ $V=(-3,2)$ ABRE HACIA ABAJO $P=1$ $F=(-3,1)$ directriz $: y=3$ $L_R=4$.	A partir de la ecuación canónica de la parábola el estudiante logró realizar la representación gráfica de dicho objeto matemático, de ahí que el estudiante realizó la actividad de tratamiento en el registro gráfico.
4	$y^2-6y-12x-3=0$ $y^2-6y+9=12x+3+9$ $y^2-6y+9=12x+12$ $(y-3)^2=12(x+1)$ $4p=12 \quad p=3$ LA ECUACION ANTERIOR CORRESPONDE A LA ECUACIÓN DE UNA PARÁBOLA, CON VÉRTICE (3,-1), FOCO IGUAL A (3,2), Y DIRECTRIZ $y=-4$. POR TANTO LA PARÁBOLA ABRE HACIA ARRIBA.	El estudiante no determinó de forma correcta los elementos de la parábola, realizó una descripción verbal de dicha parábola, pero esta descripción no es la correcta, por ende, presenta dificultad en la actividad de conversión del registro algebraico al verbal.
5	• ECUACIÓN GENERAL $= x^2+6x-8y+41=0$ • ECUACIÓN CANÓNICA $=(x-3)^2=8(y-4)$ • VÉRTICE $=(3,4)$ • FOCO $=(3,2)$ • DIRECTRIZ $= y=6$ • $P=2$. $(x-3)^2=8(y-4)$ → CANÓNICA $x^2+6x+9=8y-32$ $x^2+6x-8y+9+32=0$ $x^2+6x-8y+41=0$ → GENERAL	Dada la representación gráfica de una parábola el estudiante no halló de forma correcta la ecuación general, la ecuación de su directriz y la longitud del lado recto de dicha parábola, entonces resulta que el estudiante no realizó la actividad de conversión del registro grafico al algebraico.

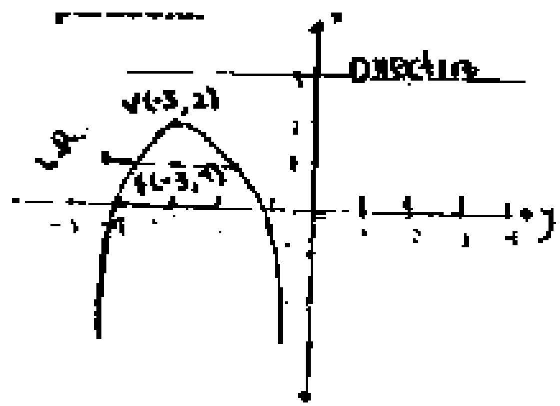
6	$(y-3)^2 = 3(x+4)$ $y^2-6y+9 = 3x+12$ $y^2-6y+9-3x-12 = 0$ $y^2-6y-3x-3 = 0$ $y^2-6y-3x-3 = 0$ Ecuación general.	Dados algunos elementos de la parábola, el estudiante no logra determinar de forma correcta la ecuación general de esta, pues cometió errores en extraer información de los elementos para hallar la ecuación general, lo cual indica que no realizó la actividad de conversión del registro verbal al registro algebraico.
7	$4y^2-48x-20y = 71$ $4y^2-20y = 71+48x$ $4(y^2-5y) = 48x+71$ $y^2-5y = \frac{48x+71}{4}$ $y^2-5y+\frac{25}{4} = \frac{48x}{4}+\frac{71}{4}+\frac{25}{4}$ $(y-\frac{5}{2})^2 = 12x+24$ $(y-\frac{5}{2})^2 = 12(x+2)$ $V = (\frac{5}{2}, -2)$ $F = (\frac{11}{2}, 2)$ directriz $= x = -\frac{1}{2}$ $LR = 12$	A partir de la ecuación general de la parábola el estudiante no realizó la representación gráfica y no determinó adecuadamente los elementos de dicha parábola, puesto que no realizó la actividad de conversión del registro algebraico al gráfico.
8	 	Dados los elementos de una parábola el estudiante hizo correctamente la representación gráfica de este objeto matemático, por tan razón el estudiante realizó la actividad de conversión del registro verbal al gráfico.

9	$V=(6,1)$ $F=(4,1)$ $d: x=8$ $Le=6.$ $(y-1)^2=6(x-6)$ → ECUACIÓN CANÓNICA $y^2-2y+1=6x-36$ $y^2-2y+1-6x+36=0$ $y^2-2y-6x+37=0$ → ECUACIÓN GENERAL	El estudiante no realizó una descripción verbal del objeto matemático parábola a partir de su representación gráfica, lo cual indica que se le dificultó la actividad de conversión del registro grafico al verbal.
10	 $x^2-10x+\frac{25}{4}y=0$ $x^2-10x+25=-\frac{25}{4}y+25$ $(x-5)^2=-\frac{25}{4}(y-4)$ ALCANCE HORIZONTAL = 10 M ALTURA MÁXIMA = 4 M	A partir de la situación problema el estudiante dio correctamente su solución, realizó una representación gráfica para ilustrar el problema, además realizó correctamente un proceso algebraico que le permitió determinar la altura máxima y el alcance máximo de la pelota, de manera que el estudiante realizó la actividad de conversión del registro verbal al algebraico involucrando el registro gráfico.

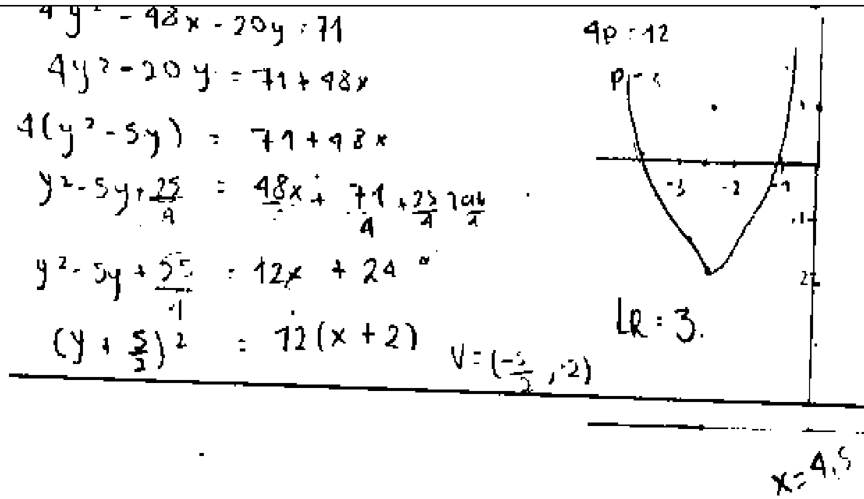
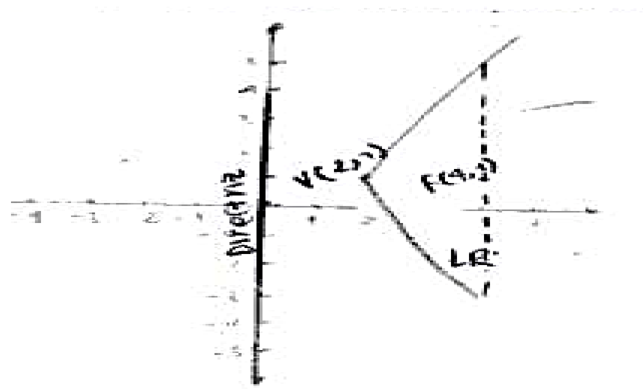
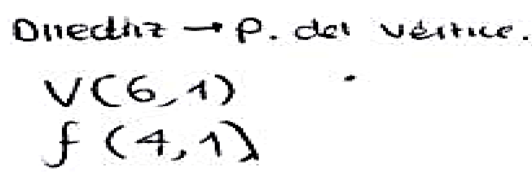
5.3.5 Análisis de la solución del estudiante E5

Tabla 13. *Respuestas y análisis del desempeño del estudiante E5 en las actividades de tratamiento y conversión*

Tarea	Respuestas	Desempeño

1	Es un lugar geométrico cuyos puntos estan ubicados a la misma distancia del eje de simetría, está conformado por: Vértice, foco, lado recto, Directriz, eje de simetría.	El estudiante no describió correctamente el objeto matemático parábola, es decir, no realizó la actividad de tratamiento en el registro verbal.
2	$y^2+10y = 16x+9$ $y^2+10y+25 = 16x+9+25$ $y^2+10y+25 = 16x+34$ $(y+5)^2 = 16(x+2)$	Dada la ecuación general de la parábola el estudiante cometió errores en el proceso algebraico para determinar la ecuación canónica de dicho objeto matemático, lo cual indica que no realizó la actividad de tratamiento en el registro algebraico.
3		El estudiante ubicó correctamente los elementos de la parábola, pero no representó correctamente dicha parábola, es decir no realizó adecuadamente la actividad de tratamiento en el registro gráfico.
4	$y^2-6y = 12x-3$ $y^2-6y+9 = 12x-3+9$ $y^2-6y+9 = 12x+6$ $(y-3)^2 = 12(x+2)$ V = (3, -2) Abre hacia	A partir de la ecuación general de la parábola el estudiante no hizo correctamente el proceso algebraico para describir de forma verbal el lugar geométrico parábola, esto indica que presentó dificultad para realizar la actividad de conversión del registro algebraico al verbal.

5	$D = (3,6)$ $4p = 8$ $V(3,4)$ $p = 2$ $F(3,2)$ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ $(x-3)^2 = 4p(y-4)$ $(x-3)^2 = 4(2)(y-4)$ $(x-3)^2 = 8y-16$ $x^2 - 2(x)(-3) + 9 = 8y - 16$ $x^2 - 2x + 5 + 9 = 8y - 16$ $x^2 - 2x + 14 - 8y - 16 = 0$ $x^2 - 2x + 14 - 8y - 16 = 0$ $x^2 - 2x - 8y + 14 - 16$ $x^2 - 2x - 8y - 12 = 0$ Ecuación General. $y = k - p$ $y = 4 - 2$ $y = 2$ $LR = 8$	Dada la representación gráfica de la parábola el estudiante no logró hallar correctamente la ecuación general de la parábola, por ende, no realizó la actividad de conversión del registro gráfico al algebraico.
6	$V(-1,3)$ $F(-1,3)$ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ $(x-(-4))^2 = 4(3)(y-3)$ $(x+4)^2 = 12(y-3)$ $(x+4)^2 = 12y - 36$ $x^2 + 2(x)(4) + 16 = 16y - 36$ $x^2 - 2x + 8 + 16 = 16y - 36$ $x^2 - 2x + 24 = 16y - 36$ $x^2 - 2x + 24 - 16y + 36 = 0$ $x^2 - 2x - 16y + 24 + 36 = 0$ $x^2 - 2x - 16y + 60 = 0$ Ecuación General	El estudiante no determinó de forma correcta la ecuación general de la parábola cometió errores en identificar si la parábola abre hacia arriba o hacia la derecha para así poder determinar la ecuación canónica que se debe utilizar para hallar su ecuación general, por lo cual no realizó correctamente la actividad de conversión del registro verbal al algebraico.

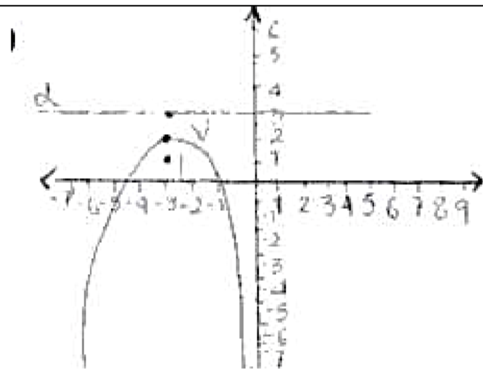
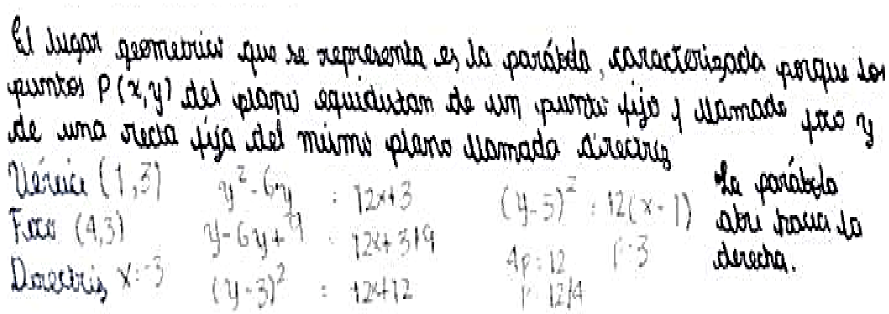
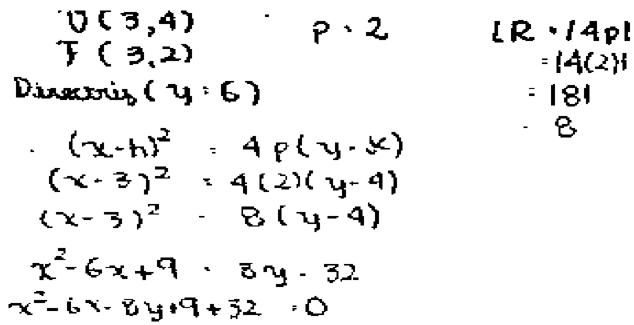
7		Dada la ecuación general de la parábola el estudiante desarrolló correctamente procesos algebraicos para encontrar los elementos de esta, pero no representó correctamente este lugar geométrico, lo cual indica que presentó dificultad para realizar la actividad de conversión del registro algebraico al gráfico.
8		Dados de forma verbal los elementos de la parábola el estudiante logra realizar correctamente la representación gráfica de esta, así pues, el estudiante realizó la actividad de conversión del registro verbal al gráfico.
9		A partir de la representación gráfica de la parábola el estudiante no realizó la descripción verbal de este objeto lo cual indica que presentó dificultad para realizar la actividad de conversión del registro gráfico al verbal.

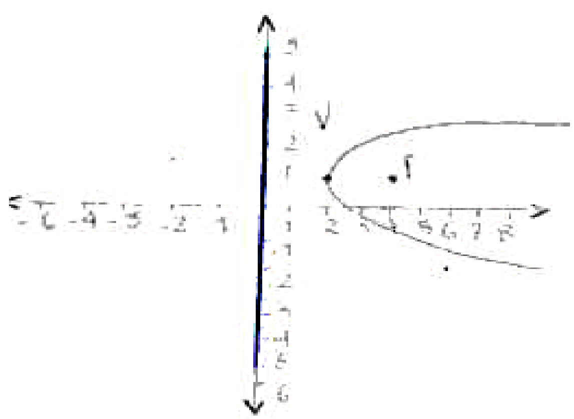
10		El estudiante no realizó ningún procedimiento para resolver la situación problema, por consiguiente, no realizó la actividad de conversión del registro verbal al registro algebraico involucrando el registro gráfico.

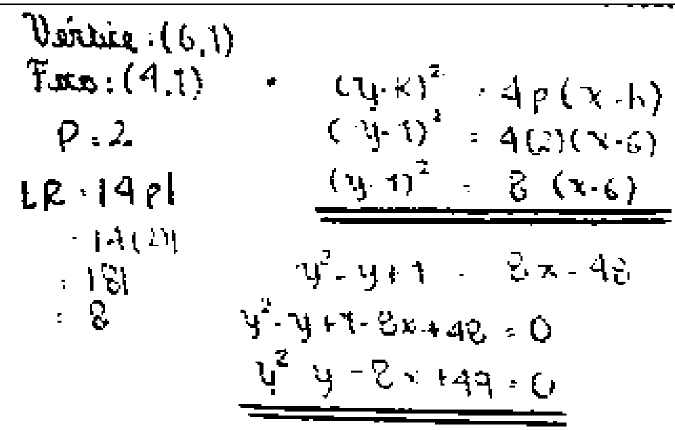
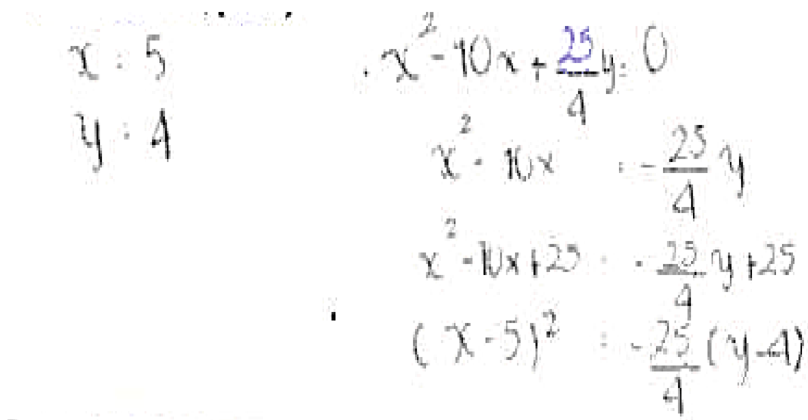
5.3.6 Análisis de la solución del estudiante E6

Tabla 14. *Respuestas y análisis del desempeño del estudiante E6 en las actividades de tratamiento y conversión*

Tarea	Respuestas	Desempeño
1	La parábola es el espacio geométrico de los puntos de un plano que tienen equidistancia respecto a un punto fijo y una recta.	El estudiante describió de forma correcta el lugar geométrico parábola lo cual indica que realiza la actividad de tratamiento en el registro verbal.
2	$y^2+10y-16x+9=0$ $y^2+10y+25=16x-9+25$ $(y+5)^2=16x+16$ $(y+5)^2=16(x+1)$	Dada la ecuación general de la parábola el estudiante determinó adecuadamente su ecuación canónica, así pues realizó correctamente la actividad de tratamiento en el registro algebraico.

<table>
<tr><td>3</td><td></td><td>A partir de la ecuación canónica de la parábola el estudiante logró realizar correctamente la representación gráfica de esta, de ahí que él desarrolló correctamente la actividad de tratamiento en el registro gráfico.</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>El estudiante cometió errores en el proceso para determinar los elementos de la parábola a partir de su ecuación general, esto indica que no describió de forma correcta este lugar geométrico, por tal razón, no realizó correctamente la actividad de conversión del registro algebraico al verbal.</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td>Al determinar la ecuación general de la parábola a partir de su gráfica, el estudiante no identificó hacia donde abre la parábola por lo cual no halló de forma adecuada la ecuación de esta, esto indica que no realizo correctamente la actividad de conversión del registro gráfico al algebraico.</td></tr>
</table>

6	$V(-4,3)$ $F(-1,3)$ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ $(y-3)^2 = 4(3)(x+4)$ $(y-3)^2 = 12(x+4)$ $y^2-6y+9 = 12x+48$ $y^2-6y+9-12x-48=0$ $y^2-6y-12x-39=0$	A partir de los elementos dados de la parábola el estudiante encontró de forma correcta la ecuación general de esta, por tanto, realizó la actividad de conversión del registro verbal al algebraico.
7	$4y^2-48x-20y-71$ $4y^2-48x-20y-71=0$ $4y^2-20y = 48x+71$ $4(y^2-5y) = 48x+71$ $y^2-5y = \frac{48x}{4}+\frac{71}{4}$	El estudiante no realizó la representación gráfica de la parábola a partir de su ecuación general, esto debido a que no realizó en su totalidad los procesos algebraicos para determinar sus elementos, lo cual indica que presentó dificultad en realizar la actividad de conversión del registro algebraico al gráfico.
8		Al realizar la representación gráfica de la parábola el estudiante no tuvo en cuenta la longitud del lado recto, por ende, esta representación no es correcta, por tal motivo se deduce que no realizó adecuadamente la actividad de conversión del registro verbal al gráfico.

9		A partir de la gráfica de la parábola el estudiante determinó correctamente los elementos de esta, pero no describió de forma verbal el lugar geométrico allí representado, así pues, no realizó la actividad de conversión del registro grafico al verbal.
10		En la situación problema el estudiante realizó correctamente el proceso para determinar la altura máxima y alcance máximo de la pelota, pero no logra concluir la respuesta para esta situación, no represento gráficamente lo planteado en el problema, por tal razón presentó dificultad en la actividad de conversión del registro verbal al registro algebraico involucrando el registro gráfico.

5.4 Análisis global del desempeño de los estudiantes

Teniendo como base el análisis individual de los estudiantes se construye la Tabla 14, en la que se presenta el resumen del tipo de transformación semiótica desarrollada ellos. En esta tabla se encuentra el tipo de transformación semiótica clasificada en niveles y los estudiantes que se han identificado con el seudónimo de E1 hasta E6, asimismo, se encuentra el símbolo X, para indicar que el estudiante no realizó el tipo de transformación semiótica correspondiente o ✓ para el caso contrario.

Tabla 15 Desempeño mostrado por los estudiantes en la solución del cuestionario.

ESTUDIANTES	TIPO DE TRANSFORMACIÓN SEMIÓTICA									
	Nivel I			Nivel II						Nivel III
	T: r^1	T: r^2	T: r^3	C: $r^2 \to r^1$	C: $r^3 \to r^2$	C: $r^1 \to r^2$	C: $r^2 \to r^3$	C: $r^1 \to r^3$	C: $r^3 \to r^1$	C: $r^1 \to r^2 \to r^3$
E1	✓	✓	X	X	X	✓	✓	✓	✓	X
E2	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	X	✓
E3	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	X
E4	X	X	✓	X	X	X	X	✓	X	✓
E5	X	X	✓	X	X	X	X	✓	X	X
E6	✓	✓	✓	X	X	✓	X	X	X	X

5.5 Análisis de las entrevistas

A continuación, se presenta el análisis de las entrevistas hechas a cada estudiante, ver Anexo 6, sobre la solución de las tareas del cuestionario; se presentan en forma gráfica las relaciones entre lo argumentado por ellos y las categorías de análisis (tratamiento y conversión).

5.5.1 Análisis entrevista E1

Para el nivel I, la red semántica se muestra en la Figura 22, donde se puede apreciar las argumentaciones dadas por el estudiante E1 y su relación con la actividad de tratamiento en los registros r^1, r^2 y r^3, de acuerdo a esta se infiere: en cuanto al trabajo en el interior del registro r^1 se identificó que el estudiante en sus argumentaciones describió de forma verbal la parábola como sección cónica y como puntos que son equidistantes a la directriz como del foco; en el registro r^2 describió de forma correcta el proceso que se realiza para determinar la ecuación canónica de la parábola a partir de su ecuación general además reconoce los casos de factorización que allí se emplean, asimismo, diferenció correctamente la representación semiótica de la parábola de forma canónica y general; en el registro r^3 argumentó que primero se saca las coordenadas del foco y después se halla el valor de p para poder identificar el foco y así graficarla, además reconoció la representación gráfica de la parábola a partir de su ecuación canónica con su respectiva orientación tal como lo argumentó; “porque empezaba con x más un número, entonces el eje de simetría era ubicado en x, entonces pues era para arriba o para abajo, y como el mmm la p era negativa entonces abría hacia abajo” (ENT1 E1); de acuerdo a las descripciones dadas se concluye que el estudiante logró realizar la actividad de tratamiento en los registros r^1, r^2 y r^3.

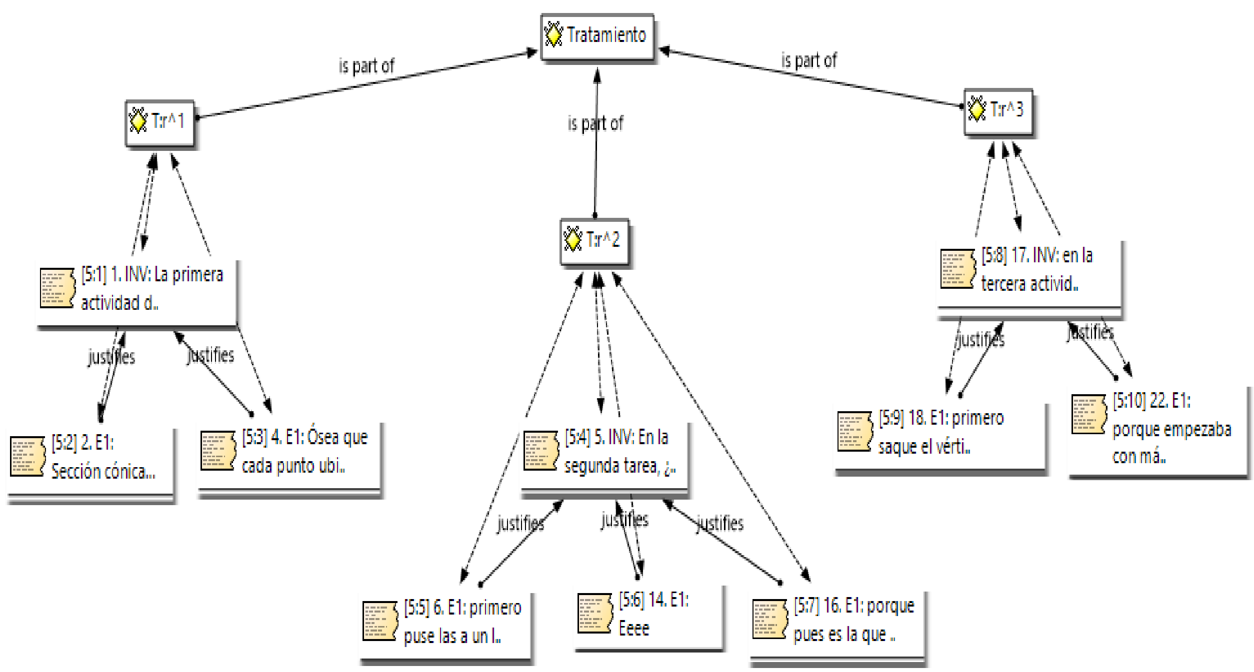


Figura 22. Red semántica de las respuestas E1 en el nivel I

Para el nivel II y III, la red semántica se muestra en la Figura 23, donde se puede observar los argumentos dados por el estudiante E1 y su relación con la actividad de conversión de un registro a otro, de ahí surge el análisis:

En la actividad $C: r^2 \rightarrow r^1$, el estudiante argumentó que lo primero que se debe realizar para poder describir el objeto matemático parábola es sacar los elementos de esta, lo cual se hace pasando la ecuación general a la canónica "…hice como los cálculos.., …y pues lo describí en palabras" (ENT E1), en esta argumentación dada por el estudiante se identifica que el proceso realizado corresponde a la conversión del registro algebraico al verbal.

Ahora tomando como referencia la actividad $C: r^3 \rightarrow r^2$, en la argumentación: "ee pues primero los escribí aparte como el vértice, el foco y eso, y escribí pues conté la distancia entre el vértice y el foco para sacar p, y despues con esos datos hice la ecuacion canonica, la pase a la general" (ENT E1), se evidenció que el estudiante primero identificó los elementos de la parábola a partir de su representación gráfica, halló el valor de p y con esos datos identificó la ecuación canónica para luego pasarla a la ecuación general, es decir describió verbalmente el proceso que se realiza en la actividad de conversión del registro gráfico al algebraico.

Ahora, en la actividad $C: r^1 \rightarrow r^2$ el estudiante argumentó que ubicó el vértice y el valor de p en la ecuación canónica y luego desarrolló los procesos necesarios para encontrar la ecuación general, es decir usó las condiciones dadas de forma verbal, identificó la ecuación canónica que cumpliera con las condiciones y a partir de esta halló la ecuación general, por lo tanto describe correctamente el proceso de la actividad de conversión del registro verbal al algebraico.

Tomando como base la actividad $C: r^2 \rightarrow r^3$ se identificó que el estudiante realizó la actividad de conversión en los registros r^2 y r^3 ya que en su argumentación "…primero la pase a la canónica, para pues ahí sacar el vértice, para que lado abría, la directriz, pues la distancia del vértice y la directriz y ya, y el lado recto…si la parábola abre para la derecha tiene que estar ubicada la directriz en x, y pues por lo de las unidades también lo podría decir" (ENT E1), se identifica que el estudiante a partir de la ecuación general realizó procesos algebraicos para determinar la ecuación canónica de la parábola y a partir de esta, determinó los elementos para ubicarlos en el plano cartesiano y realizar su construcción gráfica, esto indica que el estudiante paso del registro algebraico al gráfico.

En la actividad $C\colon r^1 \rightarrow r^3$, el estudiante argumentó "primero ubique el vértice y después puse el foco a la distancia de dos unidades y la directriz pues decía que estaba ubicada en $\mathrm{x} = 0$ y después la grafique" (ENT E1), se identifica que interpretó los elementos de la parábola dados de forma verbal, los ubicó en el plano y a partir de estos realizó la representación gráfica, además tuvo en cuenta hacia donde abría la parábola "…pues si la directriz estaba más hacia la izquierda del vértice y el vértice es en la mitad, entonces abría para la derecha" (ENT E1), lo cual indica que el estudiante realizó la actividad de conversión del registro verbal al gráfico ya que tomó en cuenta los elementos de la parábola dados de forma verbal para realizar su representación gráfica.

Por otra parte, en la actividad $C\colon r^3 \rightarrow r^1$ el estudiante logró describir el objeto matemático parábola a partir de la representación semiótica en el registro gráfico tal como se evidencia en su argumentación "ubique el vértice y el foco, y después la ecuación de la directriz y de la recta y después lo describí en mis palabras, entonces quedó, el vértice es $(6,1)$, su foco está ubicado en $(4,1)$ y la ecuacion de su directriz es $\mathrm{x} = 8$, abre hacia la izquierda y su lado recto es 8" (ENT E1), por ello, el estudiante interpretó la representación de la parábola y extrajo los elementos para poder describir de forma verbal la parábola que estaba representada es así como logra pasar del registro gráfico al verbal.

Finalmente, en la actividad $C: r^1 \rightarrow r^2 \rightarrow r^3$ el estudiante reconoció que la ecuación dada en la situación problema corresponde a la de una parábola y que era necesario pasarla a la ecuación canónica ya que a partir del vértice podría hallar su solución, asume que la coordenada del vértice representa la altura máxima y la mitad del alcance horizontal; en su argumentación "pues que el primero la altura máxima está ubicada pues en el vértice de la parábola y el alcance horizontal es donde termina la parábola, entonces ubique el vértice que sería $(5, -4)$ porque con la ecuación general la pase a canónica y pues ahí supe el vértice después era saber el máximo alcance horizontal donde terminara la parábola eee fue 8 pues porque el vértice estaba en 4 y era la mitad, entonces completa seria 8" (ENT E1), se evidencia que tomó el valor de la coordenada de x como la altura y la de y como el alcance horizontal, este error hace que no llegue a la solución correcta del problema planteado, sin embargo al seguir indagando sobre el proceso que realizó para solucionar la situación problema, reconoció que había cometido un error en su solución, tal como lo argumentó "…fue de 5 metros porque fue, mmm no porque me quedo mal, ahora que lo pienso, … porque la altura máxima seria en y y seria 4, … puse que era 8, pero pues ahora por lo que te digo seria 10" (ENT E1).

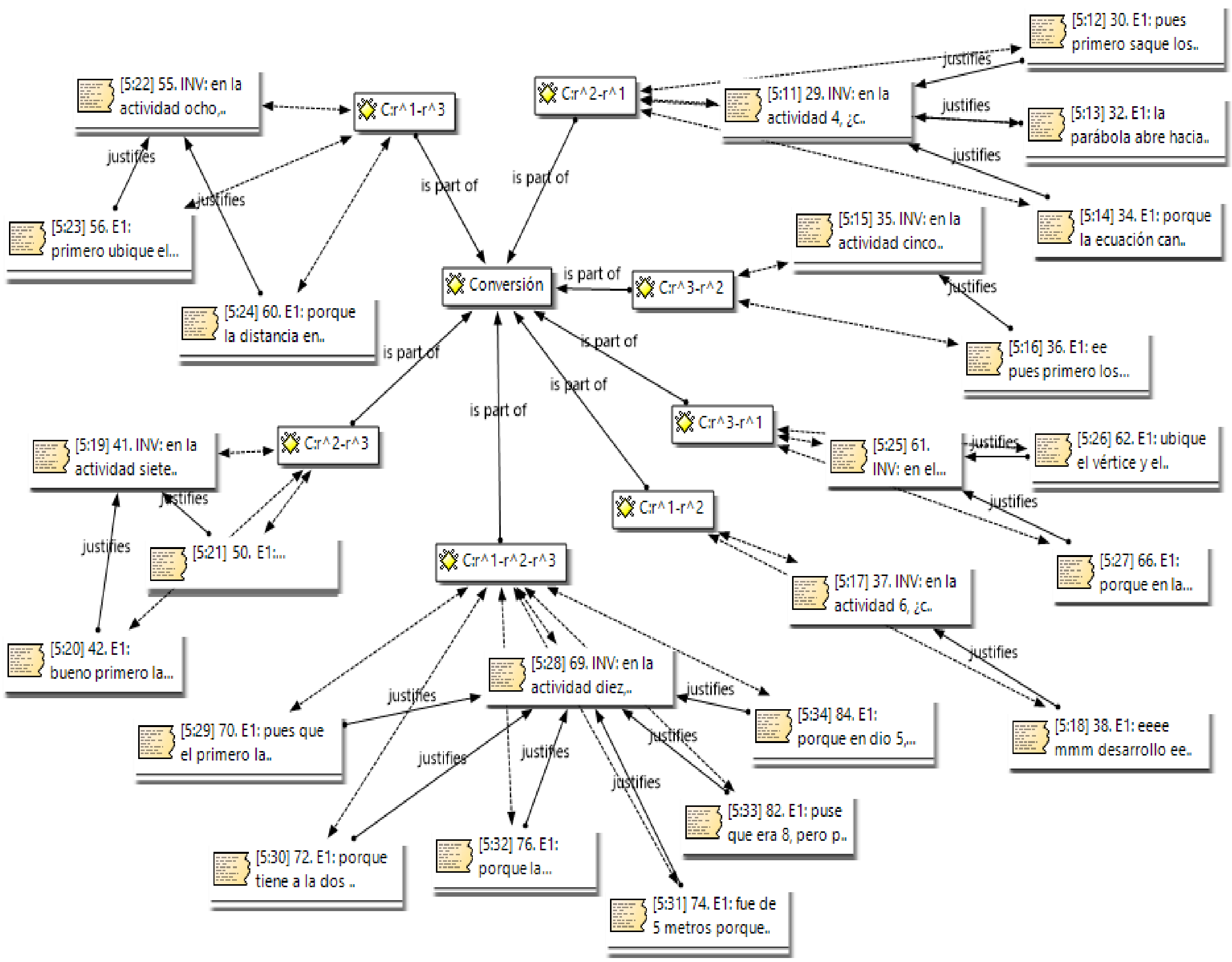


Figura 23. Red semántica de las respuestas E1 en el nivel II y III

5.5.2 Análisis entrevista E2

Para el nivel I, la red semántica se muestra en la Figura 24, donde se puede apreciar lo dicho por el estudiante E2 y su relación con la actividad de tratamiento en los registros r^1, r^2 y r^3; esta representa lo siguiente: en el registro r^1 se identificó que el estudiante describió la parábola como lugar geométrico y como puntos que están a una misma distancia, considera que estos puntos deben estar a la misma distancia del foco como de la recta directriz; en el registro r^2, describió el proceso que realizó para determinar la ecuación canónica de la parábola a partir de su ecuación general, para esto utilizó la factorización y las propiedades de las ecuaciones, aquí se evidencia el tratamiento en el registro algebraico cuando menciona el proceso para determinar la ecuación canónica de la parábola; en la argumentación "…primero se tiene en cuenta a los factores que acompañan la ecuación x y y, y teniendo en cuenta estos se saca el vértice, el lado recto se saca pues por el número que está acompañando acá al lado de la y, se despeja, se halla la distancia de p…" (ENT E2), se evidencia el proceso que desarrolló el estudiante para poder realizar la representación gráfica, además considera la orientación de la parábola con el signo negativo para referirse a que la parábola abre hacia abajo, por ende se concluye que el estudiante reconoce las diferentes representaciones de la parábola en el registro r^3 y el trabajo en el interior de este.

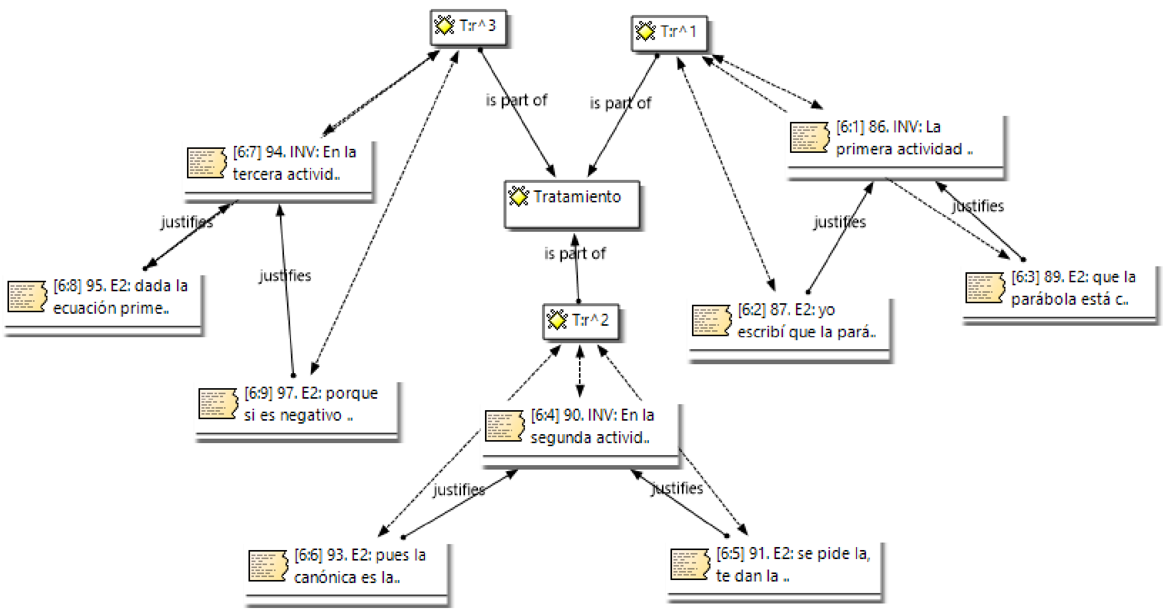


Figura 24. Red semántica de las respuestas E2 en el nivel I

Para el nivel II y III, la red semántica se muestra en la Figura 25, donde se puede observar los argumentos dados por el estudiante E2 y su relación con la actividad de conversión de un registro a otro, de ahí surge el siguiente análisis:

En la actividad de conversión $C: r^2 \rightarrow r^1$, el estudiante describió que lo primero que se debe hacer es pasar la ecuación general a la canónica y ahí determinar los elementos de la parábola y a partir de esto describir este objeto matemático, además relacionó la ecuación de la parábola con la orientación de esta, tal como se evidencia en su argumentación "porque la ecuación canoníca como la incógnita x esta elevada al cuadrado y no y, entonces eso significa que la parábola es horizontal y que puede abrir hacia la derecha o hacia la izquierda" (ENT E2), por tal motivo, el estudiante describe acertadamente la actividad de conversión del registro algebraico al verbal.

Pasando a la actividad de conversión $C: r^3 \rightarrow r^2$, argumentó "a partir de la gráfica bueno se tienen ósea primero para la ecuación se tienen que tener en cuenta la directriz que en este caso es $y = 6$, la longitud del lado recto que es la distancia de aca a aca pasando por el foco, mmm y definiendo esto se reemplaza esto en la fórmula canónica de la parábola, entonces al reemplazar el vértice queda $(x - 3)^2 = -8$ que es el lado recto factor de $(y - 4)$" (ENT E2), por lo cual, el estudiante extrajo los elementos de la representación gráfica de la parábola y luego identificó la ecuación canónica que se relacionaba con la gráfica y a partir de esta realizó los proceso o procedimientos pertinentes para encontrar la ecuación general, de ahí se concluye que describió el proceso realizado de la actividad de conversión del registro gráfico al algebraico.

En la actividad $C: r^1 \rightarrow r^2$, el estudiante argumentó correctamente el proceso que se realiza para hallar la ecuación general de la parábola a partir de las condiciones dada, "a mm ósea mira primero se llega a la canónica, que es donde se reemplaza el vértice, se halla el lado recto teniendo en cuenta la distancia del vértice al foco, entonces después para llegar a la general se desarrollan los cuadrados, entonces en la primera parte…" (ENT E2), de acuerdo a lo expuesto se puede concluir que el estudiante tomó las condiciones dadas de forma verbal y realizó procedimientos algebraicos para hallar la ecuación general de la parábola, de acuerdo a su argumentación expuso lo que corresponde a la actividad de conversión del registro verbal al algebraico.

Ahora, teniendo como referencia la actividad $C: r^2 \rightarrow r^3$ y de acuerdo a los argumentos dados por el estudiante "mmm bueno dada la ecuación que es la general se busca primero que todo pasar a la canónica, en la canónica ya se puede identificar la ubicación del vértice y el anchor y pues la longitud del lado recto, y pues con esto ya se puede saber si la parábola es horizontal o vertical , hacía que lado abre" (ENT E2), se pudo evidenciar el desarrollo de la actividad de conversión del registro algebraico al gráfico ya que tomó la ecuación general de la parábola y la paso a su forma canónica para así determinar los elementos de esta y a partir de ahí realizar su representación gráfica.

Pasando a la actividad $\mathrm{C}: \mathrm{r}^1 \rightarrow \mathrm{r}^3$, el estudiante a partir de las condiciones dadas identificó hacia donde abre la parábola, hizo uso del parámetro de que la distancia del vértice al foco debe ser la misma que de la directriz al vértice, expone que el foco siempre debe estar por dentro de la parábola así mismo asume que la directriz debe estar atrás del vértice, como resultado se concluye que hubo un desarrollo de la actividad de conversión del registro verbal al gráfico, la conversión se evidencia en su argumentación "pues se ubican las coordenadas del vértice que me dicen que es $(2,1)$, despues las del foco que es $(4,1)$ que esta ubicado mas a la derecha del foco y teniendo en cuanta la ecuación de la directriz que es $\mathrm{x} = 0$ que me da a la izquierda del vértice entonces ya seque es horizontal y pues se determina que abre hacia la derecha porque la forma de la parábola tiene encerrada el foco, es decir el foco debe estar adentro de la parábola, entonces por eso se dice que abre hacia ese lado" (ENT E2)

En la actividad $\mathrm{C}: \mathrm{r}^3 \rightarrow \mathrm{r}^1$, se constató que el estudiante realizó los procesos algebraicos para determinar la ecuación general de la parábola a partir de la información suministrada en la representación gráfica de esta, pero no argumenta de forma verbal la descripción de este objeto matemático, de ahí se concluye que no logró desarrollar la actividad de conversión del registro gráfico al verbal.

Finalmente, en la actividad $\mathrm{C}: \mathrm{r}^1 \rightarrow \mathrm{r}^2 \rightarrow \mathrm{r}^3$, se identificó que el estudiante desarrolló esta actividad ya que a partir de la situación problema logró identificar que el movimiento de la pelota correspondía a la representación gráfica de la parábola y así mismo que la ecuación general dada era de una parábola, a partir de ese análisis transformó la ecuación general a lo canónica e identificó el vértice el cual correspondía a la altura máxima y al alcance máximo horizontal tal como lo argumentó "el vértice es $(5,4)$ por lo tanto se toma el valor que este punto tiene en y que es 4 metros por lo tanto esa será la altura máxima a la que llegue la pelota y para el alcance horizontal se tiene en cuenta la parte en x de la cordenada del vertice, en este caso es 5 entonces como que se despeja el vértice está ubicado en la mitad de la parábola entonces para el alcance horizontal tendríamos que tomar dos veces esta distancia por lo tanto el máximo alcance horizontal de la pelota seria 10 metros" (ENT E2), de acuerdo a lo anterior se concluye que el estudiante realizó las conversión del registro verbal al algebraico pasando por el gráfico.

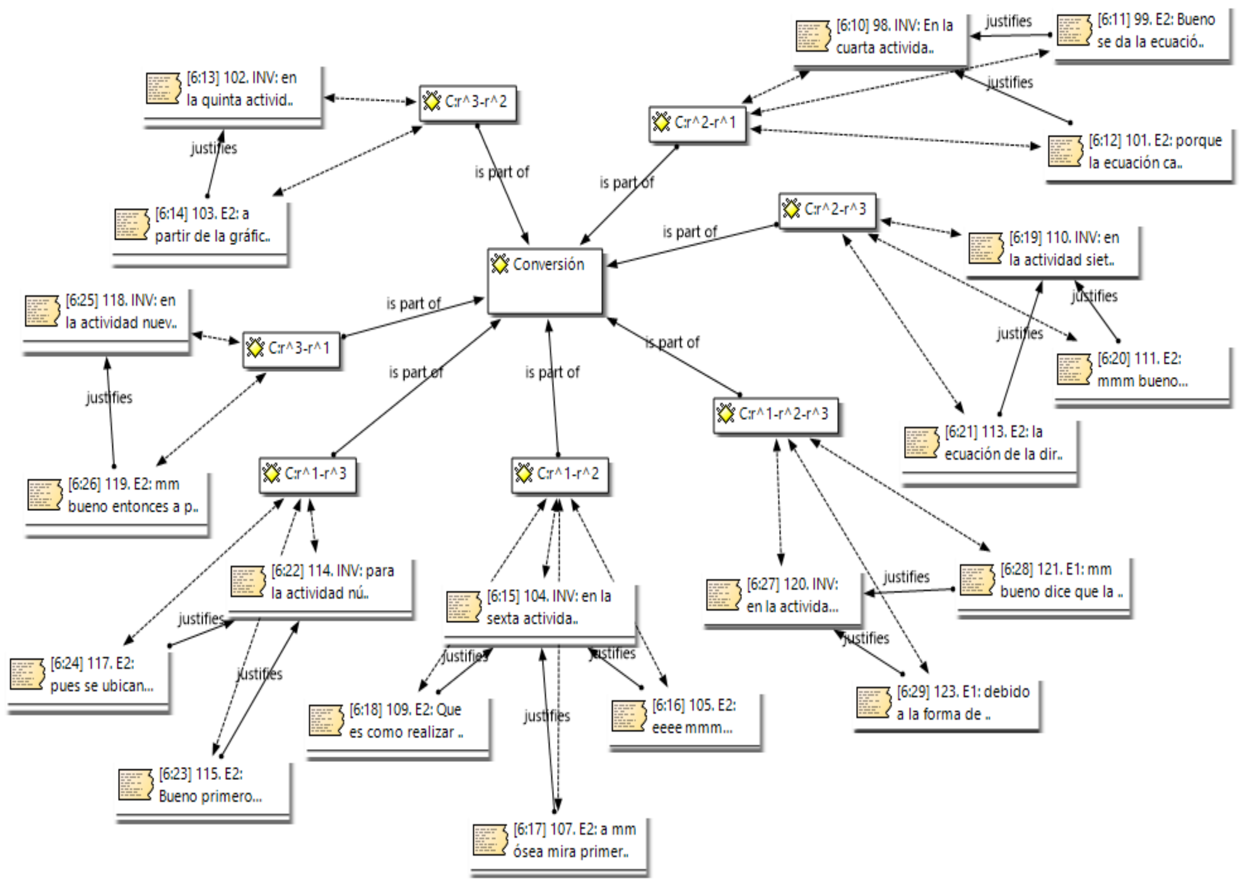


Figura 25. Red semántica de las respuestas E2 en el nivel II y III

5.5.3 Análisis entrevista E3

Para el nivel I, la red semántica se muestra en la Figura 26, donde se puede apreciar lo dicho por el estudiante E3 y su relación con la actividad de tratamiento en los registros r^1, r^2 y r^3, de ahí surge el siguiente análisis: en la actividad $T: r^1$, el estudiante al describir la parábola argumentó que "es un lugar geométrico en que los puntos están ubicados a la misma distancia del eje de simetría, está compuesto por el vértice, el foco, la directriz y el lado recto" (ENT E3) de acuerdo a lo mencionado anteriormente, se puede evidenciar que describe la parábola como un lugar geométrico pero en la otra parte de la argumentación no corresponde a la definición de la parábola por ende no hubo un desarrollo de la actividad de conversión en el registro verbal; en la actividad $\mathrm{T}: \mathrm{r}^2$ se evidenció que el estudiante argumentó correctamente el proceso que se debe desarrollar para pasar de la ecuación general de la parábola a la canónica, es por esto que el estudiante logró desarrollar la actividad de tratamiento en el registro algebraico; en la actividad $\mathrm{T}: \mathrm{r}^3$ el estudiante identificó cual era la representación gráfica de la parábola es decir para donde abría esta y a partir de esto ubicó los demás elementos y así pudo realizar la representación semiótica de la parábola en el registro gráfico.

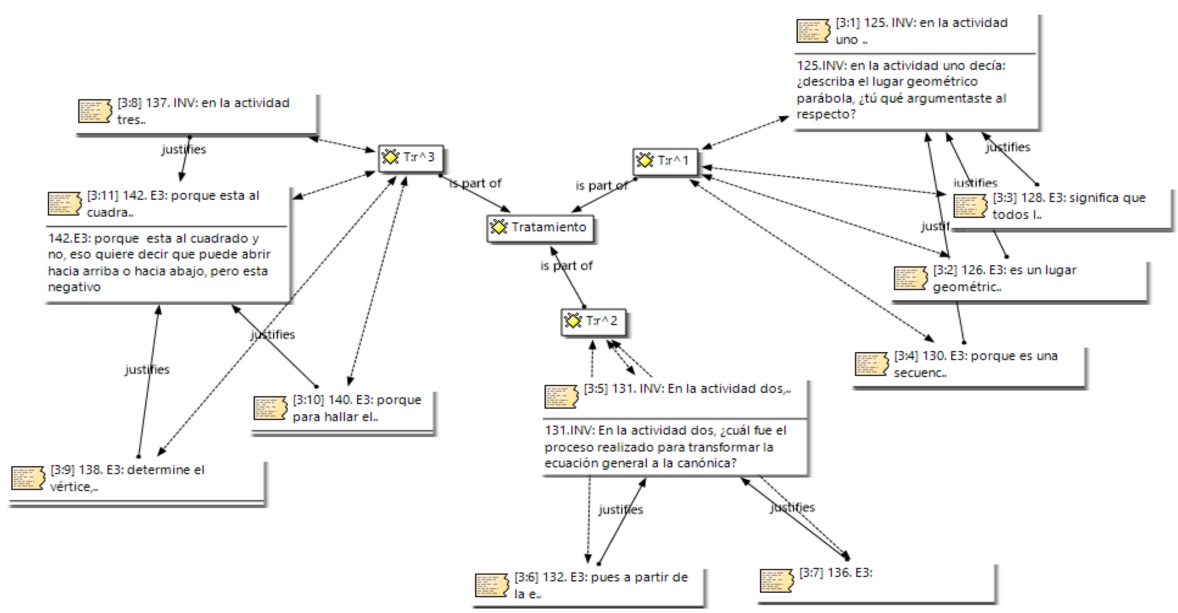


Figura 26. Red semántica de las respuestas E3 en el nivel I

Para el nivel II y III, la red semántica se muestra en la Figura 27, donde se puede observar los argumentos dados por el estudiante E2 y su relación con la actividad de conversión de un registro a otro, de ahí surge el siguiente análisis:

En la actividad $\mathrm{C}: \mathrm{r}^2 \rightarrow \mathrm{r}^1$ se identificó que hubo un desarrollo de esta actividad tal como se evidencia en su argumentación, narró que para poder describir el lugar geométrico parábola primero era necesario pasar la ecuación general a la canónica para determinar sus elementos y luego si mencionar que "…es una parábola que abre hacia la derecha donde su vértice es la ecuación anterior corresponde a la ecuación de la parábola con vértice…" (ENT E3), esto evidencia que el estudiante desarrolló la actividad de conversión del registro algebraico al verbal ya que en sus argumentaciones mencionó el proceso de pasar la ecuación general a la canónica y luego hizo la descripción del objeto matemático que estaba representado a través de una ecuación.

Tomando como referencia la actividad $\mathrm{C}: \mathrm{r}^3 \rightarrow \mathrm{r}^2$, el estudiante identificó a partir de la gráfica hacia donde estaba orientada la parábola y así dedujo cual era la ecuación canónica que debía usar, posteriormente identificó los elementos de la parábola en la gráfica y los reemplaza en la ecuación elegida, finalmente realizó los procedimientos algebraicos hasta llegar a la ecuación general, esto se puede evidenciar en la siguiente afirmación "identifique para donde abre la parábola y así utilizar la ecuación canónica adecuada luego desarrolle el binomio y las operaciones y por último la iguale a cero"(ENT E3), en conclusión el estudiante realizó una descripción del proceso que se realiza en la actividad de conversión del registro gráfico al algebraico.

Pasando a la actividad $\mathrm{C}: \mathrm{r}^1 \rightarrow \mathrm{r}^2$, se evidenció un desarrollo de esta actividad porque el estudiante tomó los elementos de la parábola dados de forma verbal para poder determinar la ecuación general, tal como lo menciona "a partir de los datos que me dieron halle el valor de p y reemplace en la ecuación y resolví las operaciones" (ENT E3), es decir pasó del registro verbal al algebraico.

En la actividad $\mathrm{C}: \mathrm{r}^2 \rightarrow \mathrm{r}^3$, el estudiante logró el desarrollo de esta como se evidencia en sus argumentaciones "…primero pase las y a un lado, pase el número natural con la x, factorice las y, pase el número que me quedaba el 4 al factorizar, lo pase a dividir hice las operaciones… ubiqué el vértice y para el foco conté 3 puntos hacia la derecha para ubicar el foco y tres para la izquierda para ubicar la directriz."(ENT E3), aquí se evidencia el procedimiento algebraico que realizó a partir de la ecuación general de la parábola y el proceso para realizar su representación gráfica, lo cual indica que hay una conversión del registro algebraico al gráfico.

Para la actividad $C: r^1 \rightarrow r^3$, el estudiante en su argumentación "ubiqué el vértice y el foco y la directriz, y como la longitud del lado recto era 8 a partir del foco conté 4 hacia arriba y 4 hacia abajo" (ENT E3), logró describir el proceso que ejecutó para poder realizar la representación gráfica de la parábola a partir de las condiciones dadas de forma verbal, este proceso corresponde con el que se realiza en la actividad de conversión del registro verbal al gráfico, por tanto hubo un desarrollo de esta actividad de conversión.

En la actividad $C: r^3 \rightarrow r^1$, se identificó que el estudiante desarrolló esta actividad ya que describió el lugar geométrico parábola a partir de su representación gráfica tal como se evidencia en su descripción " …el vértice es $(6,1)$, el foco $(4,1)$, la directriz $x = 8$ y $p = -2$ y pues es una parábola que abre hacia la izquierda y su ecuación general es $y^2 - 2y + 8x - 47 = 0$ y su ecuación canónica es $(y - 1)^2 = -8(x - 6)$" (ENT E3), por ende logró pasar del registro grafico al verbal.

Finalmente en la actividad $C: r^1 \rightarrow r^2 \rightarrow r^3$, el estudiante no desarrolló esta actividad ya que no logró pasar la ecuación general de la parábola a la canónica tal como lo argumenta "la verdad no supe que hacer para determinar la ecuación canónica" (ENT E3).

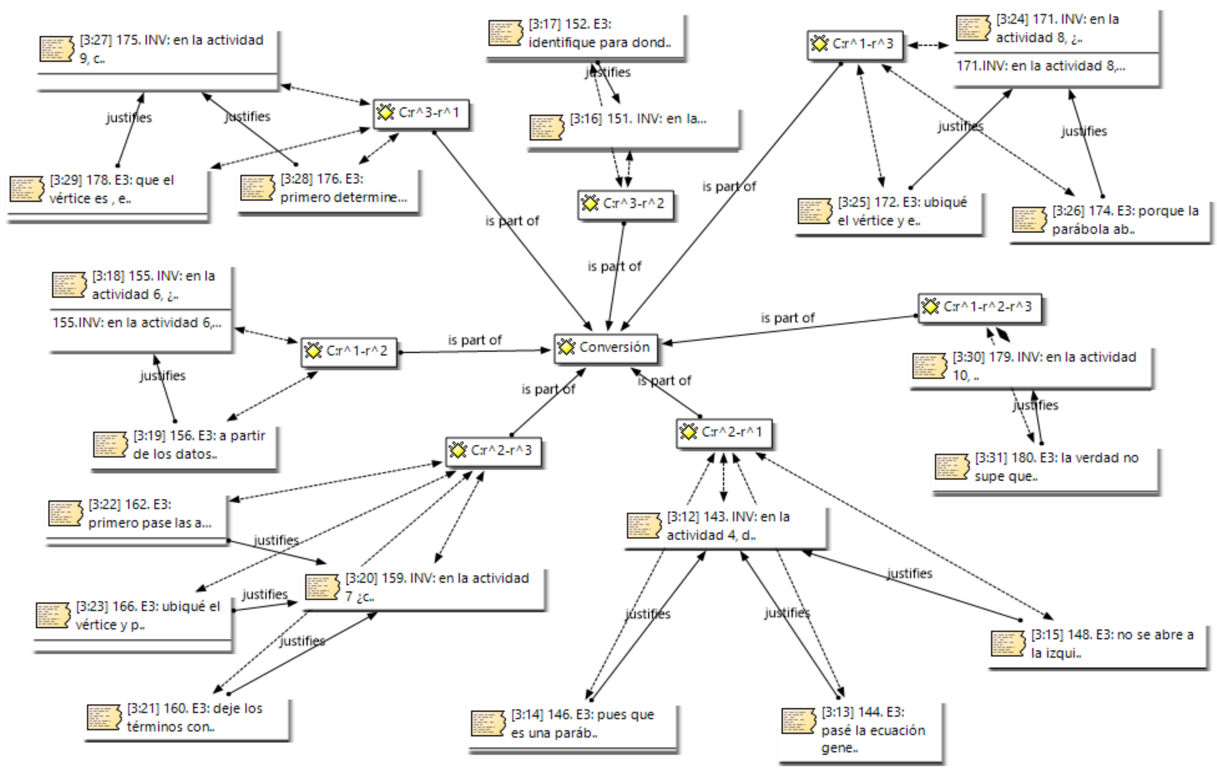


Figura 27. Red semántica de las respuestas E1 en el nivel II y III

5.5.4 Análisis entrevista E4

Para el nivel I, la red semántica se muestra en la Figura 28, donde se puede apreciar lo dicho por el estudiante E4 y su relación con la actividad de tratamiento en los registros r^1, r^2 y r^3, de ahí surge el siguiente análisis:

En la actividad $T{:}\, r^1$, el estudiante logró desarrollar esta actividad ya que en su argumentación “una parábola es un lugar geométrico cuya característica es que hay la misma distancia del foco al vértice que del vértice a la directriz” (ENT E4), se evidencia el tratamiento en el registro verbal, dando la definición de la parábola como lugar geométrico y como el conjunto de puntos que están a la misma distancia del foco y de la directriz; en la actividad $T{:}\, r^2$ se constató que la argumentación que dio el estudiante “pues primero, la ecuación general que es la que está igualada a cero, la pasamos, igualamos primero las y a un lado y x, y el número natural al otro lado, después hallamos, resolvemos el binomio" corresponde con el proceso que se desarrolla para pasar la ecuación general de la parábola a su ecuación canónica, por ende de acuerdo a lo expuesto hubo un desarrollo de la actividad de tratamiento en el interior del registro algebraico; en la actividad $\mathrm{T:r^3}$, el estudiante desarrolló esta actividad porque realizó correctamente la descripción para realizar la representación gráfica de la parábola tal como se evidencia en su argumento "pues primero saque el vértice, teniendo en cuenta que hay que cambiar los signos, después, por la forma de la ecuación deduje que se abría hacia abajo, halle p, que es el valor absoluto y empecé a ubicar el foco de acuerdo a la distancia del vértice a p" (ENT E4).

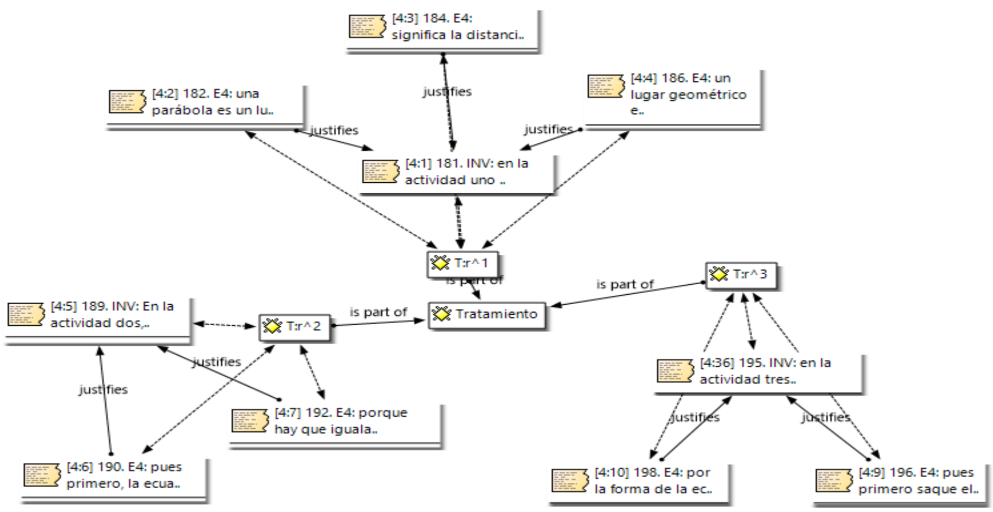


Figura 28. Red semántica de las respuestas E4 en el nivel I

Para el nivel II y III, la red semántica se muestra en la Figura 29, donde se puede observar los argumentos dados por el estudiante E4 y su relación con la actividad de conversión de un registro a otro, de ahí surge el siguiente análisis:

En la actividad $\mathrm{C:r^2 \rightarrow r^1}$ se evidenció que el estudiante no logró describir acertadamente el proceso que se realiza para pasar la ecuación general de la parábola a la canónica y así poder describir este lugar geométrico, esto se da porque en su argumentación "por la forma de la ecuación, porque va x y y, eso quiere decir que abre hacia arriba o hacia abajo, y dado que hay un número negativo, entonces va hacia abajo" no identifico correctamente que la ecuación dada correspondía a una parábola que abría hacia la derecha, es decir no logró pasar del registro algebraico al verbal.

Pasando a la actividad $C: r^3 \rightarrow r^2$, el estudiante desarrolló esta actividad porque en su argumentación "primero se ubica el vértice, cuento la distancia del vértice al foco, que va ser la misma del vértice a la directriz, pues ahí seria p y de acuerdo a los puntos que saco, puedo sacar la ecuación canónica y al despejarla encuentro la general" (ENT E4), logró mencionar adecuadamente el proceso que se desarrolla para determinar la ecuación de la parábola a partir de su representación gráfica, lo cual indica que paso del registro gráfico al algebraico.

Por otro lado, en la actividad $C: r^1 \rightarrow r^2$ el estudiante no describió detalladamente el proceso que se realiza para hallar la ecuación general de la parábola a partir de las condiciones dadas, por ende, no se puede identificar si el estudiante comprendió el proceso para hallar dicha ecuación y así mismo no se puede determinar si hubo la conversión del registro verbal al algebraico.

En la actividad $C: r^2 \rightarrow r^3$, el estudiante logró describir correctamente el proceso para determinar la ecuación canónica a partir de la general y a partir de esta identificar los elementos para realizar su representación gráfica esto se evidencia en su relato "…primero pase las y a un lado, pase el numero natural con la x, factorice las y, pase el número que me quedaba el 4 al factorizar, lo pase a dividir hice las operaciones y me daba el resultado final.. $\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 12\,x + 24$, … una parábola que abre hacia la derecha" (ENT E4), por ende se concluye que paso del registro algebraico al gráfico.

Por otra parte en la actividad $C: r^3 \rightarrow r^1$, el estudiante si desarrolló esta actividad de conversión porque logró pasar del registro gráfico al verbal debido a que hizo uso de la representación gráfica para extraer lo elementos de la parábola e identificó la orientación de esta, y así logró describir el objeto matemático parábola que estaba allí representado, esto se evidencia en su descripción “es una parábola que abre hacia la izquierda, tiene vértice $(6,1)$, el foco es $(4,1)$, la ecuación de la directriz es $x = 8$” (ENT E4).

Finalmente, en la actividad $C: r^1 \rightarrow r^2 \rightarrow r^3$, el estudiante logró pasar del registro verbal al algebraico involucrando el gráfico esto se evidencia en su descripción “primero realizar la gráfica, después dada la expresión que me daban empecé a despejarlas, despeje el binomio, después halle la ecuación canónica y teniendo en cuenta que esto al final me iba a dar 5, pues lo sume porque el alcance horizontal seria toda la parábola y me daba 10 y la altura máxima me daba 4” (ENT E4), esta evidencia muestra como el estudiante describe acertadamente el proceso realizado y la solución de la situación problema propuesta, es por esto que realizo la actividad de conversión $C: r^1 \rightarrow r^2 \rightarrow r^3$.

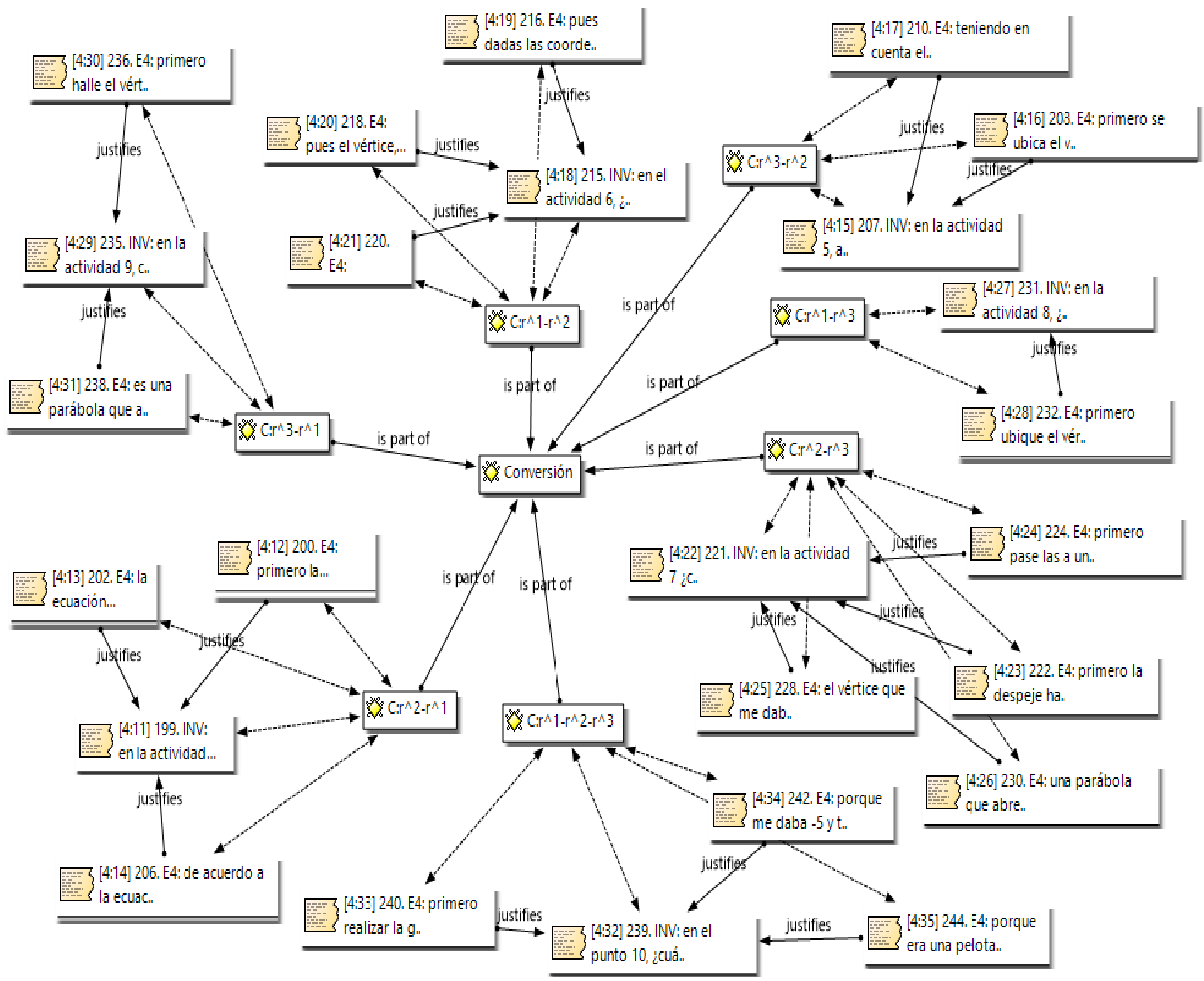


Figura 29. Red semántica de las respuestas dadas E4 en el nivel II y III

5.5.5 Análisis entrevista E5

Para el nivel I, la red semántica se muestra en la Figura 30, donde se puede apreciar lo dicho por el estudiante E5 y su relación con la actividad de tratamiento en los registros r^1, r^2 y r^3, de ahí surge el siguiente análisis:

En la actividad $T: r^1$, el estudiante describe “la parábola es un lugar geométrico cuyos puntos están ubicados a la misma distancia del eje de simetría…” (ENT E5), en esta argumentación se evidencia que define la parábola como lugar geométrico pero no comprendió que todos los puntos (x, y) que pertenecen a la parábola deben estar a la misma distancia del vértice y de la recta directriz, por ende no hubo un desarrollo de la actividad de tratamiento en el interior del registro verbal; en la actividad $\mathrm{T}: \mathrm{r}^2$, el estudiante no logró desarrollar esta actividad ya que cometió errores en los procedimientos realizados, tal como se evidencia en sus argumentos "y el número que estaba sumando al otro lado también lo puse a sumar + 9, al lado de las x" (ENT E5), aquí se identifica que el estudiante tuvo problemas al momento de despejar la ecuación lo cual no encontró de forma correcta la ecuación canónica de la parábola, por ente no hubo un desarrollo de la actividad de tratamiento en el registro algebraico; en la actividad $\mathrm{T}: \mathrm{r}^3$, el estudiante logró el desarrollo de esta ya que describió correctamente el proceso que se utiliza para realizar la representación gráfica de la parábola.

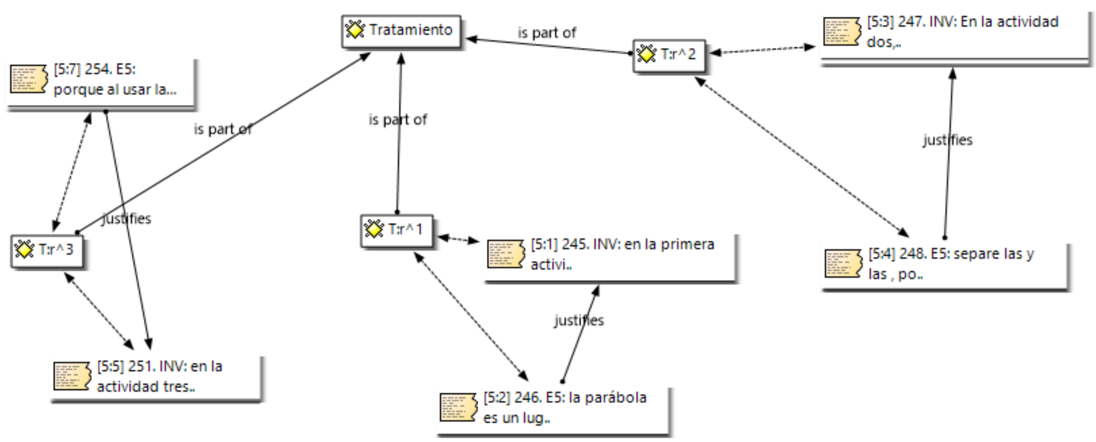


Figura 30. Red semántica de las respuestas E5 en el nivel I

Para el nivel II y III, la red semántica se muestra en la Figura 31, donde se puede observar los argumentos dados por el estudiante E5 y su relación con la actividad de conversión de un registro a otro, de ahí surge el siguiente análisis:

En la actividad $\mathrm{C}: \mathrm{r}^2 \rightarrow \mathrm{r}^1$, el estudiante no desarrolló esta actividad ya que solo se quedó en realizar procesos algebraicos para determinar la ecuación canónica de la parábola a partir de su ecuación general, es decir hubo un trabajo de tratamiento en el registro algebraico, pero no llegó a realizar la actividad de conversión del registro algebraico al verbal ya que no describió el lugar geométrico que estaba representado de forma algebraica, tal como se evidencia en su argumentación “porque no termine el punto anterior y no recordaba como determinar los puntos que me pedían” (ENT E5).

Por otro lado, en el desarrollo de la actividad $C: r^3 \to r^2$ el estudiante no tuvo presente que la representación gráfica de la parábola estaba orientada hacia abajo, lo cual hace que no identifique en la representación algebraica la ecuación canónica correspondiente; en su argumentación “…determine la ecuación general que me dio $x^2 - 2x - 8y - 2 = 0$…” (ENT E5), se identifica que la ecuación que encontró no correspondía con la representación gráfica dada, por lo tanto no hubo un desarrollo de la actividad de conversión del registro grafico al verbal.

Por otra parte, en la actividad $C: r^1 \to r^2$, el estudiante no logró desarrollar esta actividad ya que se cometió errores al reemplazar las coordenadas del vértice en la ecuación canónica elegida, tal como se evidencia en su relato “…ecuación canónica me dio $(x + 4)^2 = 12\,y - 36$, desarrollándola como binomio al cuadrado…” (ENT E5), a pesar de que eligió correctamente la representación algebraica de la parábola en su forma canónica “utilice la fórmula $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, y remplace los valores porque nombre al vértice con los puntos (h, k)” (ENT E5), y realizar correctamente los procedimientos algebraicos no llegó a la solución adecuada de la actividad propuesta, esto se dio por el error cometido en el proceso que realizó, por ende no hubo un desarrolló de la actividad de conversión del registro verbal al algebraico.

En cuanto a la actividad de $C: r^2 \to r^3$, el estudiante realizó correctamente los procedimientos en el interior en el registro algebraico para hallar la ecuación canónica de la parábola tal como lo enuncia “…tome la ecuación que me daban y para empezar a desarrollar separe x a un lado y y a otro lado, también con el mismo orden de primero los cuadrados y luego los que no tienen cuadrado…” (ENT E5), pero al momento de realizar la representación gráfica de esta no identificó correctamente hacia donde estaba orientada dicha parábola tal como lo expone "…determina hacia donde abre es positivo, entonces sé que abre hacia arriba y como está la ecuación dada en positivo abre hacia arriba…" (ENT E5), aquí se identifica que el estudiante tuvo errores en la realización de la representación gráfica de la parábola, por ende no hubo un desarrollo de la actividad de conversión del registro algebraico al gráfico.

En la actividad $C: r^1 \to r^3$el estudiante desarrolló esta actividad debido a que enunció correctamente el proceso utilizado para realizar la representación gráfica de la parábola a partir de sus condiciones dadas de forma verbal, tal como lo enunció en su argumentación "…Dibujé el plano cartesiano y allí empecé a ubicar los puntos que me daba como el vértice y el foco, una vez teniendo esto y la ecuación de la directriz como $x = 0$, tenía desde donde abría la parábola, es decir desde el vértice la ubicación del foco y la distancia entre el foco y el vértice, vértice y directriz. También…" (ENT E5), por tal motivo realizó la actividad de conversión del registro verbal al algebraico.

Pasando a la actividad $C: r^3 \to r^1$, aquí no se pudo evidenciar nada ya que el estudiante no opinó nada al respecto.

Finalmente, en la actividad $C: r^1 \to r^2 \to r^3$) el estudiante logró identificar que el movimiento de la pelota correspondía a la representación gráfica de la parábola y así mismo que la ecuación general dada era de una parábola, a partir de ese análisis transformó la ecuación general a lo canónica e identificó el vértice el cual correspondía a la altura máxima y al alcance máximo horizontal tal como lo argumentó "tome la ecuación que me daban, la despeje y halle la ecuación canónica, además me piden el alcance horizontal y yo sé que el alcance horizontal, si dibujo una parábola en el plano cartesiano, esta parábola me va a quedar dividida por la mitad, entonces el alcance horizontal es la suma entre esas dos mitades y por la ecuación canónica me dio 5, entonces el alcance horizontal en total seria 10 metros y yo sé que la altura máxima es el punto más alto al que puede llegar la parábola y este también por la ecuación canónica me dio 4 metros.” (ENT E5), de acuerdo a lo anterior se concluye que el estudiante realizó la conversión del registro verbal al algebraico pasando por el gráfico.

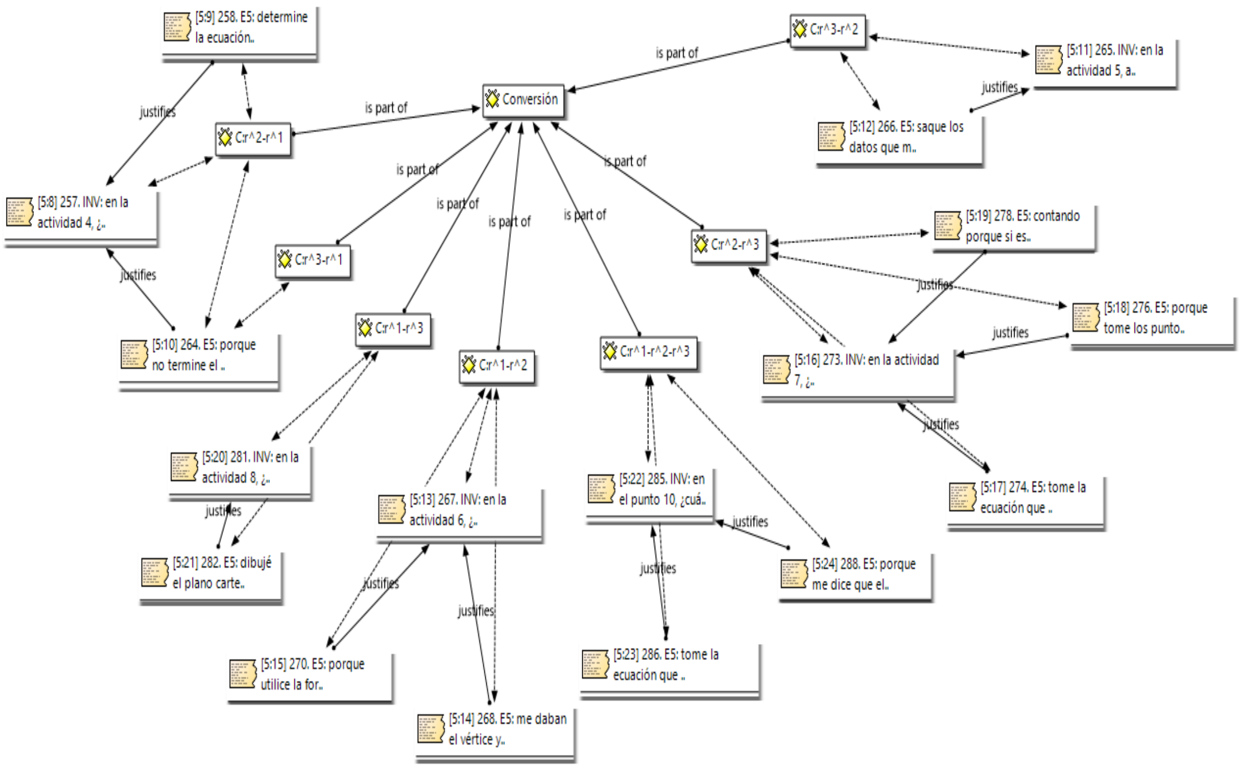


Figura 31. Red semántica de las respuestas E5 en el nivel II y III

5.5.6 Análisis entrevista E6

Para el nivel I, la red semántica se muestra en la Figura 32, donde se puede apreciar lo dicho por el estudiante E6 y su relación con la actividad de tratamiento en los registros r^1, r^2 y r^3, de ahí surge el siguiente análisis:

En la actividad $T: r^1$ el estudiante logró desarrollar esta actividad porque considero la parábola como un lugar geométrico y como todos los puntos que están a la misma distancia del foco y de la recta directriz, tal como lo expone “la parábola es un lugar geométrico donde los puntos en un plano tienen x distancia o están respecto a una misma distancia de un punto fijo que se llama foco y una recta que se llama directriz" (ENT E6), por tal razón el estudiante realizó la actividad de tratamiento en el interior del registro verbal; en la actividad $T: r^2$ se evidenció el desarrollo de esta, de acuerdo a la descripción del proceso realizado por el estudiante "…yo hice fue tomar la ecuación general, luego comencé a tomar los datos para lograr hacer la factorización; los datos que estaban en y, los deje al lado izquierdo, los datos de x al lado derecho, el dato que me salió de la factorización…" (ENT E6), se ahí se concluye que el estudiante desarrolló la actividad de tratamiento en el registro algebraico porque a partir de la ecuación general la paso a su representación canónica; finalmente en la actividad $T: r^3$ el estudiante logró realizar la representación gráfica de la parábola de acuerdo a su argumentación "luego de esto hallaba el dato que era p, para lograr hallar el foco y la directriz, porque sabemos que la distancia que hay del vértice al foco, es la misma que hay del foco a la directriz, entonces esto me permitió hallar el foco y la directriz y ya con esto, fue posible graficarla parábola" (ENT E6), por tanto hubo un trabajo en el interior del registro gráfico.

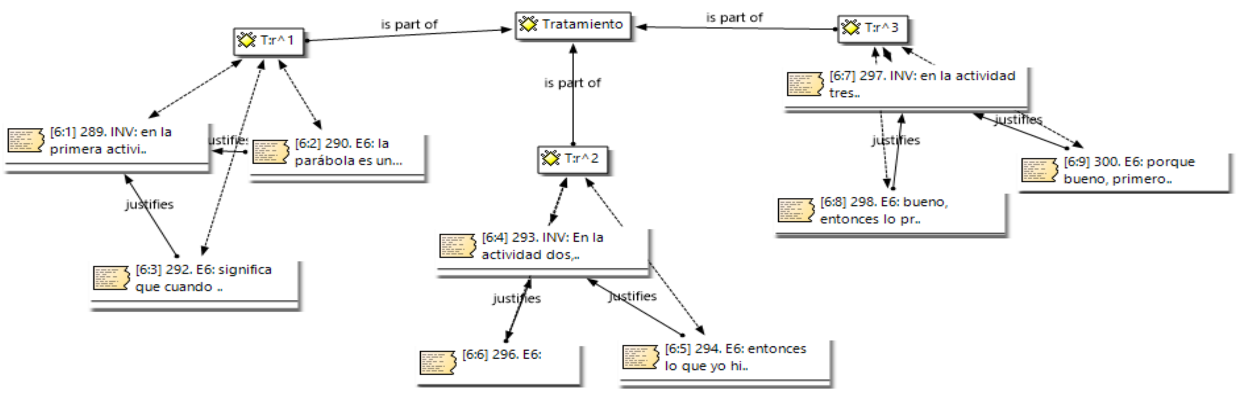


Figura 32. Red semántica de las respuestas E6 en el nivel I

Para el nivel II y III, la red semántica se muestra en la Figura 33, donde se puede observar los argumentos dados por el estudiante E6 y su relación con la actividad de conversión de un registro a otro, de ahí surge el siguiente análisis:

En la actividad $\mathrm{C}: \mathrm{r}^2 \rightarrow \mathrm{r}^1$, el estudiante realizó correctamente el proceso algebraico para determinar la ecuación canónica de la parábola a partir de su ecuación general, pero al momento de describir este lugar geométrico lo hizo de forma general, tal como lo explicó en su descripción "bueno yo dije que el lugar geométrico representaba era una parábola, caracterizada por los puntos (x, y), en el plano, x está en un punto fijo F llamado foco y de una recta fija del mismo plano llamado directriz" (ENT E6), a partir de esto se identificó que el estudiante no hizo la descripción de la parábola que estaba representada en su ecuación canónica, por ende no desarrolló la actividad de conversión del registro algebraico al verbal.

Por otro lado, en la actividad $\mathrm{C}: \mathrm{r}^3 \rightarrow \mathrm{r}^2$ el estudiante no logró desarrollar correctamente esta actividad porque a pesar de que en su argumentación tuvo claro el proceso para hallar la ecuación general de la parábola a partir de su representación, no considero el signo negativo en la ecuación canónica el cual indicaba que la parábola abría hacia abajo, esto hace que el proceso algebraico que realizo no coincida con el objeto matemático que allí estaba representado, por tanto no realizó la actividad de conversión del registro gráfico al algebraico.

Por otra parte, en la actividad $\mathrm{C}: \mathrm{r}^1 \rightarrow \mathrm{r}^2$, se evidenció que el estudiante desarrolló esta actividad, porque halló correctamente la ecuación de la parábola a partir de las condiciones dadas en forma verbal, tal como se evidencia en su descripción "lo primero que hice fue establecer la ecuación, con base en esto remplace lo que era el vértice y pues ya conociendo la distancia del vértice al foco, pude remplazar p, lo único que tuve que hacer fue es desarrollar esto con las respectivas factorizaciones y después…" (ENT E6), en conclusión logró pasar del registro verbal al algebraico.

En la actividad $\mathrm{C}: \mathrm{r}^2 \rightarrow \mathrm{r}^3$, es estudiante no logró culminar esta actividad, se quedó en la actividad de tratamiento en el interior del registro algebraico, debido a que realizó el proceso algebraico para hallar la ecuación canónica de la parábola a partir de su ecuación general, pero no representó gráficamente dicha parábola, por ende no desarrolló la actividad de conversión del registro algebraico al gráfico.

Posteriormente, en la actividad $C: r^1 \rightarrow r^3$ el estudiante a partir de las condiciones dadas logró realizar la representación gráfica de la parábola tal como lo describió "primero se trazó el plano, ubicar el vértice y el foco y ya teniendo en cuenta esto sabia para que lado abría la parábola, también nos daban lo que era la ecuación de la directriz, entonces solo era necesario trazarla y tener en cuenta el lado recto que nos estaban dando" (ENT E6), es decir que logró realizar la conversión del registro verbal al gráfico.

En la actividad $C: r^3 \rightarrow r^1$, el estudiante a partir de la representación gráfica identificó algunos elementos de esta parábola, reconoció la orientación y determinó el valor de p, esto con el fin de hallar las ecuaciones de la parábola, pero al final no describió este lugar geométrico, como resultado se concluye que no hubo un desarrollo de la actividad de conversión del registro gráfico al verbal.

Finalmente, en la actividad $C: r^1 \rightarrow r^2 \rightarrow r^3$ el estudiante identificó que la situación problema dada correspondía a un problema de aplicación sobre la parábola, debido a que reconoció que la ecuación general pertenecía a una representación semiótica en el registro algebraico, además que la trayectoria de la parábola era de forma parabólica y que la altura y alcance máximo correspondía al punto (x, y) (vértice), a pesar de que realizó correctamente todo el proceso para encontrar el vértice, no tuvo en cuenta que el valor de x representaba la mitad del alcance horizontal tal como se evidencia en su descripción "x, es decir alcance horizontal 5 y la altura o $y = 4$" (ENT E6), pero al indagar por qué el alcance horizontal era cinco, el estudiante se dio cuenta que era 10 tal como lo expone: “pensándolo bien seria 10 porque 5 solo sería la mitad” (ENT E6); por tal motivo realizó correctamente la actividad de conversión del registro verbal al algebraico.

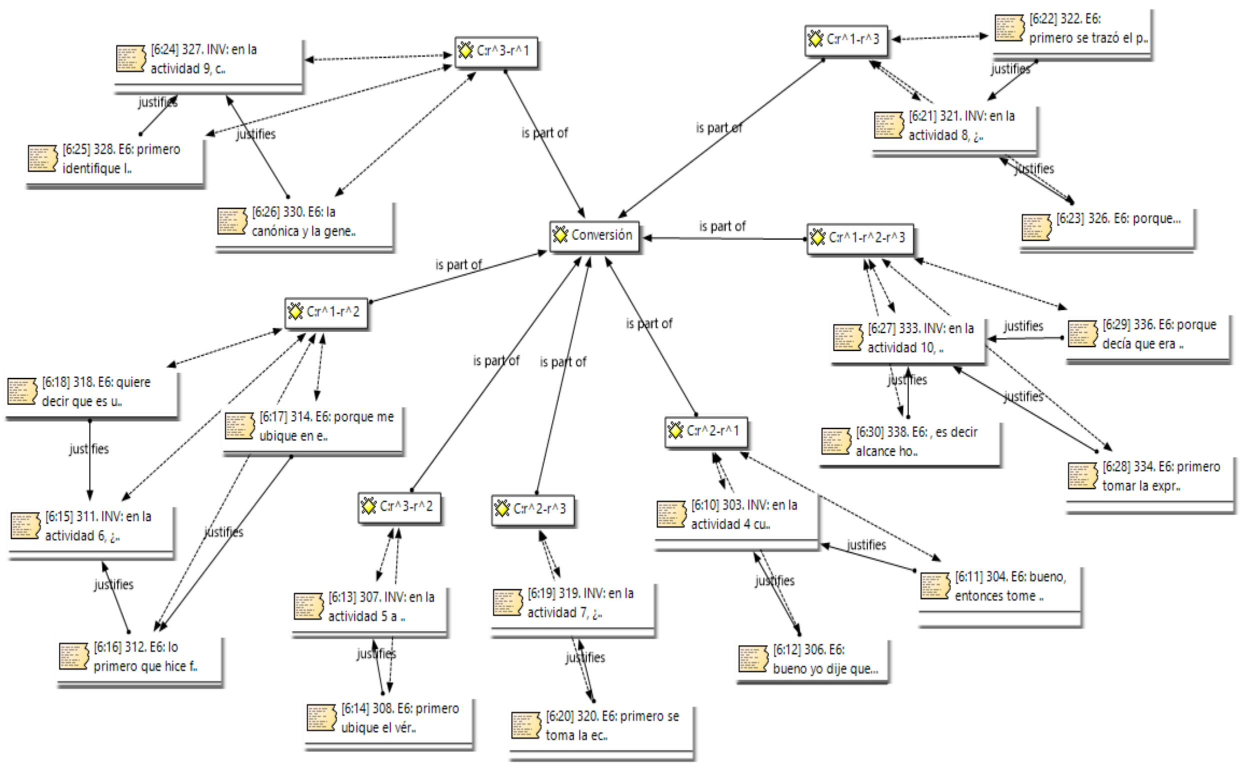


Figura 33. Red semántica de las repuestas E6 en el nivel II y III

5.6 Análisis global de las entrevistas

Al indagar sobre el proceso que desarrollan los estudiantes en cada una de las actividades propuestas y al contrastarlas con los tipos de representación semiótica, tratamiento y conversión, se pudo identificar que la mayor dificultad que presentan los estudiantes está en el desarrollo de procedimientos de tipo algorítmico, porque cometieron errores de factorización, aplicación de las propiedades de una igualdad y operaciones entre números reales, es decir presentan inconvenientes en la actividad de tratamiento en el interior del registro algebraico.

Las dificultades que presentaron los estudiantes en la actividad de tratamiento en el interior del registro algebraico generó que no pudieran realizar la actividad de conversión del registro algebraico al gráfico del algebraico al verbal, ya que para pasar del registro algebraico a alguno de estos dos registros, era necesario el trabajo en el interior del registro algebraico es decir realizar la actividad de tratamiento en este registro para luego pasar al registro gráfico o bien sea al verbal.

Por otro lado, a algunos estudiantes se les dificultó identificar la representación algebraica de la parábola a partir de su representación gráfica, es decir a partir de la gráfica no identificaban correctamente la ecuación canónica correspondiente para luego pasarla a la ecuación general, por lo tanto, no desarrollaban correctamente la actividad de conversión del registro gráfico al algebraico.

Por otra parte, se pudo evidenciar que algunos estudiantes no identificaron correctamente la ecuación canónica de la parábola a partir de su representación gráfica, por ejemplo si la representación gráfica era una parábola que abría hacia la derecha, su representación semiótica en el registro algebraico es $(y+k)^2 = 4p(x+h)$, en este análisis los estudiantes no relacionaron la gráfica con su respectiva ecuación canónica, lo cual género que no desarrollaran la actividad de conversión del registro gráfico al algebraico.

Además, se identificó que algunos estudiantes no lograron establecer una correspondencia entre el signo menos que aparecía en la ecuación canónica con la representación gráfica de la parábola, por ejemplo, una de las representaciones semióticas de la parábola en el registro algebraico es $(x+h)^2 = -4p(y+k)$, a partir de esta representación se interpreta que es una parábola que abre hacia arriba o hacia abajo, pero el signo $(-)$ indica que abre hacia abajo ya que $p < 0$; al no interpretar el significado del signo menos en la ecuación canónica de la parábola llevo a que los estudiantes no realizaran correctamente la representación gráfica de este objeto matemático.

Asimismo, al no tener presente el signo menos en la ecuación canónica de la parábola de acuerdo a la orientación de esta, ya sea hacia abajo o hacia la izquierda dependiendo de la forma de la ecuación canónica y al no utilizarlo en el desarrollo de los procesos algebraico para hallar la ecuación general de la parábola, hizo que los estudiantes no determinarnn correctamente la ecuación general por ende no hubo un desarrollo de la actividad de conversión del registro gráfico al algebraico.

Por otro lado, los estudiantes comprendieron el significado de cada uno de los elementos de la parábola, los ubicaban correctamente en la representación gráfica de esta, así mismo extraían los elementos a partir de la representación gráfica de la parábola, por tanto, se evidencia un desarrollo de actividad de tratamiento en el registro gráfico.

En la actividad de tratamiento en el registro verbal se identificó que los estudiantes relacionaron el objeto matemático parábola, como sección cónica, lugar geométrico y conjunto de puntos que están a la misma distantica del foco y de la recta directriz, es decir hubo un desarrollo de la actividad de tratamiento en el interior del registro verbal.

En la Tabla 16, se muestra el desempeño de los estudiantes de acuerdo a las argumentaciones dadas en la entrevista.

Tabla 16. Desempeño mostrado por los estudiantes en la entrevista.

ESTUDIANTES	TIPO DE TRANSFORMACIÓN SEMIÓTICA									
	Nivel I			Nivel II						Nivel III
	T: r^1	T: r^2	T: r^3	C: $r^2 \to r^1$	C: $r^3 \to r^2$	C: $r^1 \to r^2$	C: $r^2 \to r^3$	C: $r^1 \to r^3$	C: $r^3 \to r^1$	C: $r^1 \to r^2 \to r^3$
E1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
E2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓
E3	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X
E4	✓	✓	✓	X	✓	X	✓	X	✓	✓
E5	X	X	✓	X	X	X	✓	✓	X	✓
E6	✓	✓	✓	X	X	✓	X	✓	X	✓

5.7 Niveles de comprensión de la parábola

Teniendo como base el análisis del desempeño de los estudiantes en las estrategias didácticas, en la solución del cuestionario y en las respuestas a la entrevista, sobre actividades de tratamiento y conversión en los diferentes registros de representación semiótica, se establecen los siguientes niveles de comprensión con sus respectivas características.

Nivel I: en este nivel se ubican los estudiantes que identifican la parábola en los registros verbal, algebraico y gráfico, además realizan la actividad de tratamiento en algún registro (verbal, algebraico, gráfico); es decir, describen la parábola como lugar geométrico o sección cónica, hallan la ecuación general a partir de su ecuación canónica o viceversa y realizan las distintas representaciones gráficas de esta.

Nivel II: en este nivel se encuentran los estudiantes que logran realizar actividades de conversión, es decir pasan de un registro a otro.

Nivel III: en este nivel se ubican los estudiantes que integran los diferentes sistemas de representación semiótica en la actividad de conversión para la solución de situaciones problema sobre la parábola.

En la tabla 17, se muestra el desempeño de los estudiantes de acuerdo a la solución del cuestionario y a sus argumentaciones en la entrevista.

Tabla 17. Desempeño mostrado por los estudiantes en el cuestionario y la entrevista.

ESTUDIANTES	TIPO DE TRANSFORMACIÓN SEMIÓTICA									
	Nivel I			Nivel II						Nivel III
	$T: r^1$	$T: r^2$	$T: r^3$	$C: r^2 \rightarrow r^1$	$C: r^3 \rightarrow r^2$	$C: r^1 \rightarrow r^2$	$C: r^2 \rightarrow r^3$	$C: r^1 \rightarrow r^3$	$C: r^3 \rightarrow r^1$	$C: r^1 \rightarrow r^2 \rightarrow r^3$
E1	✓	✓	X	X	X	✓	✓	✓	✓	✓
E2	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	X	✓
E3	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	X
E4	X	X	✓	X	X	X	X	X	X	✓
E5	X	X	✓	X	X	X	X	✓	X	X
E6	✓	✓	✓	X	X	✓	X	X	X	X

A partir de la tabla anterior se infiere lo siguiente:

En el nivel I, el 50% de los estudiantes presentaron dificultad para describir de forma verbal el lugar geométrico parábola, actividad $T: r^1$; en el registro algebraico el 66,6% de los estudiantes efectuaron adecuadamente procesos algebraicos, actividad $T: r^2$; respecto al registro gráfico el 83,3% de los estudiantes no presentan dificultad para representar en forma gráfica la parábola a partir de su ecuación canónica, $T: r^3$.

Respecto al nivel II: 1) El 83,3% de los estudiantes presentaron dificultad en realizar la actividad $C: r^2 \rightarrow r^1$ puesto que, se les dificultó describir verbalmente el objeto matemático parábola a partir de su ecuación general, algunos de los estudiantes realizaron correctamente el proceso algebraico para determinar los elementos de la parábola, pero no describieron verbalmente este objeto; 2) en la actividad $C: r^3 \rightarrow r^2$ el 66,6% de los estudiantes, no determinaron de forma correcta la ecuación general de la parábola a partir de su representación gráfica, esto indica que se les dificultó pasar del registro gráfico al algebraico; 3) el 50% de los estudiantes tuvieron inconvenientes en la actividad $C: r^1 \rightarrow r^2$, ya que no hallaron la ecuación general de la parábola dados algunos de sus elementos de forma verbal, esto se dio porque mostraron dificultad en realizar correctamente procesos algebraicos para encontrar dicha ecuación, como por ejemplo completar un trinomio cuadrado perfecto, factorizar o aplicar propiedades de las ecuaciones; 4) el 50% de los estudiantes no realizaron correctamente la actividad $C: r^2 \rightarrow r^3$, esto sucedió porque a partir de la ecuación general de la parábola no realizaron acertadamente su representación gráfica, presentaron errores en los procesos algebraicos y en la representación gráfica de los elementos de dicha parábola; 5) en la actividad $C: r^1 \rightarrow r^3$ el 66,6% de los estudiantes desarrolló correctamente esta actividad, lo cual significa que a partir de los elementos dados de una parábola en forma verbal representaron gráficamente dicho lugar geométrico; 6) en la actividad $C: r^3 \rightarrow r^1$ el 66,6% de los estudiantes no desarrollaron correctamente la actividad de conversión del registro grafico al verbal, ya que a partir de la gráfica de una parábola no describieron de forma verbal este objeto matemático.

En el nivel III, el 66,6% de los estudiantes no resolvieron adecuadamente la situación problema de aplicación sobre la parábola, lo cual indica que presentaron dificultades en la actividad $C: r^1 \to r^2 \to r^3$ porque no identificaron que el problema correspondía a la aplicación de la parábola, no representaron gráficamente la situación o bien no realizaron adecuadamente procesos algebraicos para encontrar la solución a dicho problema.

Al analizar el proceso que desarrollaron los estudiantes en los tres niveles de comprensión del objeto matemático propuestos, se encuentra:

En el nivel I, todos los estudiantes identifican la parábola en los registros verbal, algebraico y gráfico, pero no todos lograron realizar las tres actividades de tratamiento; este nivel fue superado por el estudiante E6 porque logró desarrollar la actividad de tratamiento en cada uno de los registros, como se evidenció en las estrategias y en el cuestionario; así mismo, en la entrevista argumentó de forma correcta los procesos que se realizan en el interior de cada registro. Los demás estudiantes no superaron este nivel porque en el cuestionario y en la estrategia no desarrollaron correctamente la actividad de tratamiento en cada uno de los registros o bien en la entrevista no argumentaron de forma adecuada el proceso desarrollado.

En el nivel II, a pesar que todos los estudiantes no superaron el nivel I, hacen alguna actividad de conversión, lo cual indica que para realizar una conversión no necesariamente se deben efectuar tratamientos, como se evidenció al realizar estos y argumentar correctamente el proceso para pasar de un registro a otro. Cabe mencionar que ningún estudiante logró superar en su totalidad este nivel.

Nivel III: en este nivel se ubican los estudiantes que integran los diferentes sistemas de representación semiótica en la actividad de conversión para la solución de situaciones problema sobre la parábola; Este nivel lo alcanzaron los estudiantes E1, E2 y E4 porque dieron solución a la situación problema planteada, a pesar de que no superaron el nivel II, argumentaron correctamente el proceso para llegar a su solución.

6. Conclusiones

De acuerdo al análisis de las estrategias empleadas en la enseñanza del objeto matemático, el cuestionario, la entrevista y los tipos de representación semiótica tratamiento y conversión surgen las siguientes conclusiones:

- Las dificultades que presentaron los estudiantes en las actividades de tratamiento y conversión están relacionadas con los conocimientos previos, como por ejemplo los casos de factorización, la solución de ecuaciones y las operaciones entre números reales, esto genera obstáculos o errores al desarrollar actividades de tratamiento en el interior del registro algebraico o bien sea al realizar una actividad de conversión del registro algebraico a otro registro.

- Asimismo, otra dificultad evidenciada está en no identificar la representación semiótica en el registro algebraico del objeto matemático a partir de su representación gráfica, es decir, a partir de la representación gráfica de la parábola no la asociaban correctamente con su ecuación canónica, no desarrollan la actividad de conversión del registro gráfico al algebraico.

- Todos los estudiantes identificaron las diferentes formas de representación semiótica del objeto matemático, pero al intentar desarrollar la actividad de tratamiento o conversión se identificó el uso inadecuado de las representaciones en el interior de un registro o en la conversión de un registro a otro, es decir, solo con conocer todas las representaciones semióticas de la parábola no se prueba que el estudiante desarrolle las actividades de tratamiento y conversión.

- De acuerdo a los niveles establecidos, se pudo identificar que en el nivel I los estudiantes desarrollaron alguna actividad de tratamiento ya sea en el registro verbal, algebraico o gráfico, es decir no lograron realizar la actividad de conversión en todos los registros de representación.

- A pesar que algunos estudiantes no desarrollaron la actividad de tratamiento en cada uno de los registros establecidos, verbal, algebraico y gráfico, lograron desarrollar alguna actividad de conversión; en el nivel II se identificó que aquellos estudiantes que no completaron en su totalidad el nivel I, es decir realizar el tratamiento en todos los registros, presentaron mayor dificultad al desarrollar las actividades de conversión.

- La actividad de tratamiento en el registro verbal es uno de los menos desarrollados, a pesar que identificaron este objeto matemático como lugar geométrico, no tenían claro la definición de parábola como el conjunto de puntos (x, y) equidistante de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz (Moreno y Restrepo, 2001). Esto también se presenta porque los estudiantes no están acostumbrados a describir en matemáticas, conjeturan que en matemáticas las respuestas deben ser solo de tipo algebraico o numérico.

- En la actividad de conversión no se da la correspondencia entre dos registros de representación semiótica, es decir si los estudiantes lograron desarrollar la actividad de conversión del registro gráfico al algebraico no pudieron desarrollar la conversión del registro algebraico al gráfico, es decir no hay una correspondencia entre los registros de representación semiótica.

- Los estudiantes que lograron desarrollar la actividad de conversión del registro algebraico involucrando el gráfico planteada en el nivel III, no superaron en totalidad los niveles I y II, esto se da por que no consiguieron realizar actividades de tratamiento y conversión en todas las representaciones semióticas de la parábola; los estudiantes que no realizaron la actividad $C: r^1 \rightarrow r^2 \rightarrow r^3$ no lograron integrar los diferentes sistemas de representación semiótica en la actividad de conversión para la solución de problemas aplicativos sobre el objeto matemático parábola.

- Por otra parte, de acuerdo a las argumentaciones dadas en la entrevista y al contrastarlas con lo realizado en el cuestionario, se pudo analizar que los estudiantes tienen claro el proceso que se debe desarrollar en el interior del registro algebraico, pero no ejecutan correctamente este proceso.

- Un estudiante logra comprender un objeto matemático cuando sabe y sabe hacer, es decir debe existir una relación entre el saber y el hacer, en el caso de la comprensión de la parábola el estudiante debe argumentar correctamente el proceso que se desarrolla en cada una de las actividades de tratamiento y conversión, asimismo aplicar lo argumentado, como por ejemplo desarrollar correctamente los procesos paso a paso como lo mencionan en sus argumentaciones.

- Para lograr comprender el objeto matemático parábola es necesario que: 1) se reconozca los diferentes tipos de representación semiótica del objeto matemático parábola; 2) se realice actividades de tratamiento en el interior de cada registro de representación semiótica de la parábola; 3) se desarrolle actividades de conversión integrando los registros de representación semiótica de la parábola; 4) se integre los diferentes sistemas de representación semiótica en la actividad de conversión para la solución de situaciones problema sobre este objeto.

6.1 Perspectivas futuras

Para futuras investigaciones se recomienda:

- Involucrar en las estrategias de enseñanza del objeto matemático parábola las herramientas tecnológicas que permitan trabajar las diferentes representaciones semióticas de este objeto y a la vez la actividad de tratamiento y conversión.
- Crear y aplicar estrategias didácticas basadas en la teoría de las representaciones semióticas que permitan superar las dificultades que presentan los estudiantes con temas vistos en grados anteriores y posteriormente emplear la teoría de las representaciones semióticas para la enseñanza de la parábola.
- Investigar sobre los tipos de representación semiótica que realizan los estudiantes en el desarrollo de problemas contextualizados utilizando las diferentes herramientas tecnológicas.

7. Referencias

Alfonso, L., Salgado, D., Romero, J., y Torres , W. (2004). *Trigonometría y geometría analítica* . Bogotá: Santillana .

Beltrán, C. (2016). Representaciones semíoticas de la parábola utilizadaspor los estudiantes del grado décimo. Chía , Colombia .

D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros derepresentaciones semióticas y noética: interacciones constructivas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inheben la devolución. *Uno*, 90-106.

D'Amore, B., Fandiño , M. I., y Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática.* Bogotá: Magisterio .

De Alba , A., Mederos O., y Mayén S. (2010). La utilización de diferentes de representaciones para facilitar los procesos de formación y desarrollo de la parábola. *VIII escuela de invierno en matemática educativa. Memoria.* . México.

De la Rosa Jiménez, G. (s.f). *Una propuesta didáctica para abordar la parábola utilizando un procesador.* Obtenido de http://geometriadinamica.org/actividad/Actividades/Construyendoalaparabola.pdf

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenier en didactique des mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *16*(3), 349-382.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Santiago de Cali, Colombia: Peter Lang S.A. Editions scientifiques européennes.

Duval, R. (2002). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1*(2), 1-16.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of matematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Duval, R., y Saenz, A. (2016). Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas. Bogotá: Universidad Distrital Francisco Jose De Caldas.

Duval, R., y Saenz, A. (2016). Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José De Caldas.

Fernàndez, E. (2011). Situaciones para la enseñanza de las cònicas como lugar geomètrico desde lo puntual y lo global integrando Cabri Geometri II Plus. Santiago de Cali.

Fiorentini, D., y Lorenzato, S. (2010). *Investigación en educación matemática.* Brasil: Autores Associados.

Gaitàn, M., Lacayo, M., y Flores, W. (2014). Comprensión del aprendizaje de la parábola en undécimo grado aplicando el modelo de Van Hiele. *Ciencia e Interculturalidad, 15*(2), 21-33.

Gallardo, E. (2017). *Metodología de la investigación.* Huncayo, Perú: Universidad Continental.

González, J. (s.f). *Apolonio de Perga, las secciones cónicas.*

González, G. (2011). Tratamiento de las representaciones semíoticas de la función cuadrática. Manizales, Colombia.

Hernández , V. (2002). La geometría analítica de Descartes y Fermat: ¿y Apolonio? *Apuntes de la historia de las matematicas*, *1*(1), 32-45.

Hernández, R., Fernandez, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación.* México: McGraw-Hill.

Hofmann, J. (2002). *Historia de la matemática* . México, D.F: Limusa, S.A.

Lara, I. (2016). La parábola como lugar geométrico: una formación continua de profesores de matemáticas basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica. San Miguel , Peru.

León, J. (2016). Las construcciones geométricas en torno al lugar geométrico de la parábola influenciado por la paràbola. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 253-261.

Lehmann, C. (2003). *Geometría analítica* . México, D.F.: Grupo Noriega Editorial.

Lòpez, J., Aldana, E., y Alonso, A. (2013). Análisis de la comprensión del concepto parábola. *Respuestas*, *18*(2), 74-79.

Lopez, J., y Aldana , E. (2012). La comprensión del concepto parábola como una cónica. Medellín, Colombia.

MEN. (1998). *Matemáticas lineamientos curriculares.* Bogotá, Colombia.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá, Colombia.

Mesa, J., Aldana, E., y Alonso, A. (Junio-Diciembre de 2013). Análisis de la comprensión del concepto de parábola en un contexto universitario. *Respuestas*, 74-79.

Moncayo, A., Pantoja, J., y Fernández, E. (2012). Enfoque didáctico para la conceptualización de la parábola como lugar geométrico integrando Cabri Géomètre II Plus. Medellin , Colombia .

Moreno, V., y Restrepo , M. (2001). *Nuevo Alfa 10, serie de matemáticas con enfasis en competencias* . Bogotá, Colombia : Norma .

Oviedo, M., Kanashiro, M., Bnzaquen, M., y Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación. *Revista Aula Universitaria*(13), 29-36.

Pérez, R. (2011). *Una propuesta de enseñanza aprendizaje para la construcción y aplicación de las cónicas (tesis de posgrado).* Universidad Nacional De Colombia. Bogotá, Colombia .

Rodríguez, G., Gil, J., y García, E. (1999). *Metodología de la investigación* . Archidona (Málaga): Aljibe .

Ruiz, J. F. (2013). Una propuesta didàctica para la enseñanza de la paràbola como lugar geomètrico en el grado décimo de la institución educativa Luis López de Mesa del municipio de Medellin. Medellín, Colombia.

Tamayo, O. (2006). Representaciones semióticas y evoluciónconceptual en la enseñanza de las cienciasy las matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía, 18*(45), 37-49.

Tapia, F. (2002). Apolonio, el geómetra de la antigueda. *Apuntes de la historia de las matemáticas, 1*(1), 19-32.

Tocto, E. (2015). Comprensión de la noción función cuadrática por medio del tránsito de registros de representación semiótica en estudiantes de quinto año de secundaria (Tesis de Maestría). Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Torres, M. (2001). *Supermat matemáticas, educación media*. Bogotá, Colombia : Voluntad .

Vallejo, F., y Tamayo, O. (Julio-Diciembre de 2008). Dificultades de los estudiantes de grado octavo en los procesos de tratamiento y conversión de los números racionales. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, 4*(2), 151-182.

8. Anexos

8.1 Anexo 1. Evaluación del cuestionario por expertos

1. Carta de solicitud

Tunja, 28 de septiembre de 2018
Doctor:
EXP1.
Profesor Escuela de Matemáticas y Estadistica; docentes Licenciatura en Matemáticas
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Respetado doctor.

En el desarrollo de mi trabajo de investigación de grado de maestría en Educación Matemática, intitulada "la comprensión del objeto matemático parábola a través de las representaciones semióticas", recurro a usted, para que, como experto, me colabore en la validación de este instrumento.

Se trata de poder identificar el tipo de transformación que realiza el estudiante en cada una de las actividades propuestas en el cuestionario y a partir de esto poder establecer los niveles de comprensión del objeto matemático parábola a través del análisis de representaciones semióticas.

Quiero agradecer el apoyo que pueda brindarnos para llevar a cabo una de las etapas de la tesis de maestría intitulada "la comprensión del objeto matemático parábola a través de las representaciones semióticas".

La validación de este cuestionario por expertos sustenta la viabilidad y validez del cuestionario diseñado, para así poder establecer los niveles de comprensión del objeto matemático parábola.

En el documento anexo, se presenta el contexto de la investigación, el diseño de las actividades y al final los formatos de evaluación para que, por favor, sean diligenciados según los criterios propuestos.
Si prefiere puede diligenciarlos en los formatos anexos y enviarlos al correo electrónico luis.sanchezespinel@uptc.edu.co

Gracias por su colaboración,

Luis Eduardo Sánchez Espinel
Estudiante.
Maestría en educación matemática.

Contexto de la investigación

El propósito del trabajo de investigación que se está desarrollando es establecer niveles de comprensión del objeto matemático parábola a través del análisis de representaciones semióticas. El marco teórico y metodológico adoptado es la teoría de las representaciones semióticas, se realiza un análisis teórico del objeto matemático parábola, se diseñó y aplicó estrategias de enseñanza de este objeto basadas en la teoría de las representaciones semióticas.

El análisis teórico permite determinar los elementos que configuran el objeto matemático parábola y los diferentes registros de representación semiótica utilizados para su comprensión. Basado en la teoría de las representaciones semióticas se diseñaron y realizaron estrategias de enseñanza que permitieran a los estudiantes el trabajo en los diferentes registros de representación.

En la fase de recolección y análisis de datos se requiere el diseño y validación de un cuestionario por expertos, considerados como profesores que tengan amplia experiencia en la teoría de las representaciones semióticas y en la enseñanza del concepto.

Formulación del problema

¿Cómo las diversas representaciones semióticas privilegian la comprensión del objeto matemático parábola?

Objetivos

General

Establecer niveles de comprensión del objeto matemático parábola a través del análisis de representaciones semióticas.

Específicos

Establecer los elementos matemáticos que configuran el objeto matemático parábola a través de un estudio histórico y epistemológico.

Analizar las representaciones semióticas del objeto matemático parábola que promuevan su compresión.

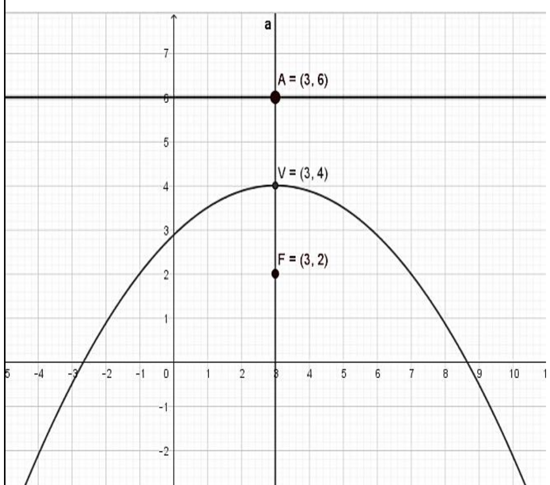
Diseñar e implementar estrategias que permitan representar el objeto matemático parábola de diferentes formas.

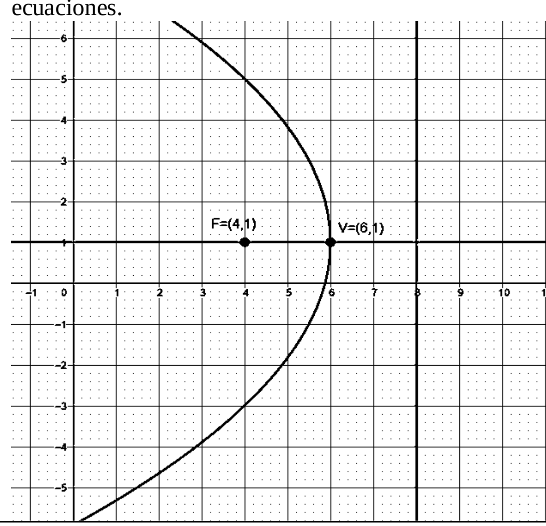
Identificar el reconocimiento que hacen los estudiantes del concepto de parábola a través de diferentes representaciones.

Diseño del cuestionario

Para la elaboración del cuestionario se tomó como referencia los elementos y sistemas de representación gráfico, verbal y algebraico del objeto matemático parábola. Tomando los registros verbales, como aquellos en los cuales se hace uso de lenguaje natural o de escritura simbólica para dar explicaciones. Los registros gráficos son los que muestran formas, figuras geométricas, diseños y gráficos, allí se puede evidenciar aquello que no es dado de manera visible en un registro verbal o algebraico; y los registros algebraicos son aquellos sistemas de escritura numérica algebraica y simbólica con carácter formal y técnico, apoyados en las reglas de formación de representaciones para sistematizar, formalizar y formular.

A continuación se describen los objetivos, tareas, descripción de la tarea y el tipo de transformación de representación semiótica, tratamiento y conversión; el tratamiento hace referencia a las transformaciones de las representaciones que ocurren internamente en el mismo registro; y la conversión se entiende como las transformaciones de las representaciones de un objeto matemático que consiste en cambiar de registros pero sin cambiar de objeto; así, una transformación permite pasar de un registro a otro.

OBJETIVO	TAREA	NO.	DESCRIPCIÓN DE LA TAREA	TRANSFORMACIÓN SEMIÓTICA
Definir el objeto matemático parábola.	Describa el lugar geométrico parábola.	1	Se le pide al estudiante caracterizar el objeto matemático parábola.	Actividad de tratamiento en el registro verbal.
Determinar la ecuación canónica de la parábola utilizando procesos algebraicos.	Dada la ecuación general de la parábola $y^2 + 10y - 16x + 9 = 0$ transfórmela a la ecuación canónica.	2	Se representa en forma algebraica una parábola por medio de la ecuación general, el estudiante deberá realizar tratamientos en este mismo registro para encontrar la ecuación canónica que es otra forma de representación del mismo objeto.	Actividad de tratamiento en el registro algebraico.
Representar en el registro gráfico el objeto parábola e identificar sus elementos.	Realice la representación gráfica, ubique el vértice, foco, directriz y el lado recto de la siguiente parábola: $(x + 3)^2 = -4(y - 2)$	3	Se le presenta al estudiante la ecuación canónica de la parábola y él debe realizar la representación gráfica de esta y además ubicar el vértice, foco, directriz y lado recto.	Actividad de tratamiento en el registro gráfico.
Describir el objeto matemático parábola a partir de su ecuación.	Describa el lugar geométrico que representa la siguiente ecuación y menciona sus elementos $y^2 - 6y - 12x - 3 = 0$	4	Dada la ecuación general de la parábola, el estudiante debe describir este objeto matemático y mencionar sus elementos a partir de su ecuación	Actividad de conversión del registro algebraico al verbal.
Determinar la ecuación general de la parábola a partir de su representación gráfica.	A partir de la gráfica determina la ecuación general de la parábola, la ecuación de la su directriz y la longitud de su lado recto. 	5	Se le presenta al estudiante la representación gráfica de una parábola con la ubicación de algunos elementos y se le pide que a partir de esta, represente los demás elementos y su ecuación general.	Actividad de conversión del registro gráfico al algebraico.
Determinar la ecuación general de la parábola a partir	Hallar la ecuación general de la parábola cuyo vértice es el punto (-4,3) y cuyo foco es el punto (-1,3).	6	Se enuncia de forma verbal algunos elementos del objeto matemático parábola y a partir de estos se le pide al estudiante que determine la ecuación general de la parábola que cumpla con las condiciones	Actividad de conversión del registro verbal al registro algebraico.

OBJETIVO	TAREA	NO.	DESCRIPCIÓN DE LA TAREA	TRANSFORMACIÓN SEMIÓTICA
de las condiciones dadas.			dadas, para esto ellos deberán realizar procesos algebraicos.	
Realizar la representación gráfica de la parábola a partir de su ecuación general.	Dada la ecuación de la parábola $4y^2 - 48x - 20y = 71$, hallar las coordenadas del vértice y del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto, luego realizar su representación gráfica.	7	Dada la ecuación general de la parábola, el estudiante debe determinar los elementos de está para poder realizar su representación gráfica.	Actividad de conversión del registro algebraico al gráfico.
Representar gráficamente la ecuación de la una parábola.	Realice la representación gráfica de la parábola dadas las siguiente condiciones, las coordenadas del vértice y foco son respectivamente $V(2,1)$ y $F(4,1)$ y las ecuaciones de la directriz y la longitud del lado recto son $x = 0$ y $LR = 8$	8	Haciendo uso de un lenguaje verbal o común se le da al estudiante los elementos de una parábola para que a partir de esta realice su representación gráfica.	Actividad de conversión del registro verbal al registro gráfico.
Describir los elementos de la parábola a partir de la representación gráfica.	A partir de la gráfica describa cuáles son los elementos de la parábola y cuáles son sus coordenadas y ecuaciones. 	9	A partir de la gráfica el estudiante deberá describir haciendo uso de un lenguaje común los elementos del objeto matemático parábola y luego enunciar cuales son las coordenadas del vértice y foco, también la ecuación de la directriz y la medida del lado recto.	Actividad de conversión registro gráfico al verbal.
Resolver situaciones problema donde se involucra el objeto matemático parábola.	La trayectoria que describe una pelota de golf al ser lanzada (sin considerar la fricción del aire) está dada por la expresión $x^2 - 10x + \frac{25}{4}y = 0$, donde x y y se expresan en metros. Hallar la altura máxima que alcanza la pelota y el máximo alcance horizontal. Tomado del libro matemáticas 10. (Lida Buitrago García) (p.115)	10	Se enuncia una situación problema haciendo uso de un lenguaje utilizado en matemáticas y a partir de este se le pide al estudiante que halle altura máxima que alcanza la pelota y el máximo alcance horizontal. El estudiante deberá realizar una representación gráfica para ilustrar la información dada y a partir de esta realizar un proceso algebraico para determinar la altura y alcance máximo.	Actividad de conversión del registro verbal al registro algebraico involucrando el registro gráfico.

Encuesta

El formato de la encuesta presenta los aspectos, observaciones y las valoraciones que como experto asignara a cada actividad.

Representación: valorar el tipo de representación y transformación semiótica que está utilizando el investigador en el diseño y los estudiantes en la solución de cada actividad según se clasificación, tipo de representación verbal, grafica o algebraica y tipo de transformación, tratamiento o conversión.

Grado de dificultad: asignar un valor entre 1 y 5 de acuerdo a la dificultad de cada actividad, considerando:

1-nada, 2-poco, 3-medio y 4-alto

Grado de relevancia: Asignar el grado de relevancia entre 1 y 4 a la actividad, si cuando el estudiante la intente resolver, se puedan hacer inferencias sobre el tipo de transformación que está utilizando. 1-nada, 2-poco, 3-medio, 4-alto y NA-no aplica.

Actividad	Tipo de registro de representación	Tipo de transformación semiótica	Grado de dificultad	Grado de relevancia	Observaciones o sugerencias complementarias de la actividad.
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

8.2 Anexo 2. Estrategia didáctica 1

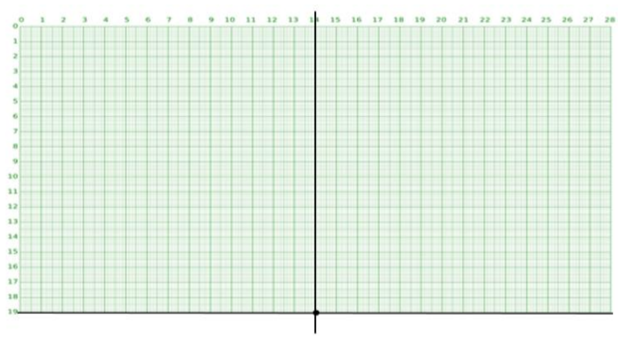
Representación gráfica intuitiva de la parábola

Objetivo: explorar, indagar y conocer el registro gráfico de la parábola

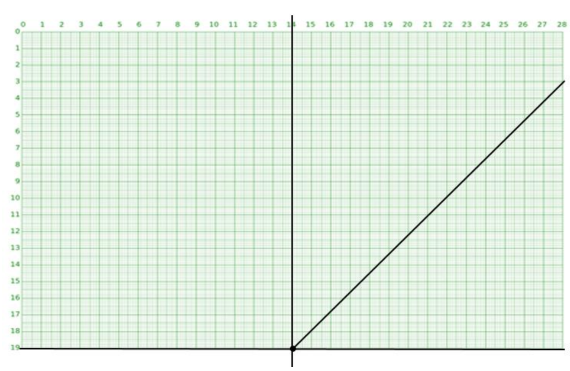
Materiales: Hoja de papel milimetrado, un octavo de icopor, alfileres con cabeza grande, chinches, hilo de lana, regla y lápiz.

Procedimiento

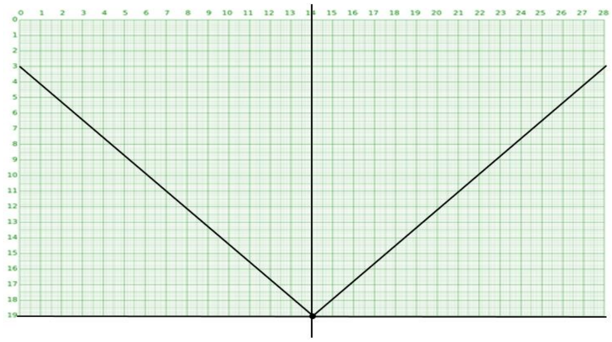
Paso 1. Tome una hoja de papel milimetrado en forma horizontal, traza un segmento vertical por la mitad de la hoja y un segmento por el borde inferior de la hoja, ubique el punto de intersección de los dos segmentos; como se representa en la siguiente imagen.



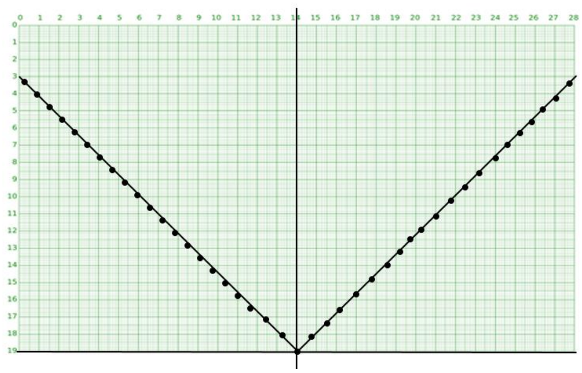
Paso 2. Tome como origen el punto de intersección obtenido en el paso 1, a partir de este mida un ángulo de 45 grados a los dos lados del segmento vertical ver la siguiente imagen, (tome como centro el segmento vertical y como eje el segmento del borde de la hoja y mida el ángulo hacia el segmento vertical).



Paso 3. Trace con la regla un segmento desde el punto de intersección hasta el borde lateral derecho de la hoja que pase por el ángulo medido en el paso 2, realice esto mismo al otro lado del segmento vertical, como se visualiza a continuación.



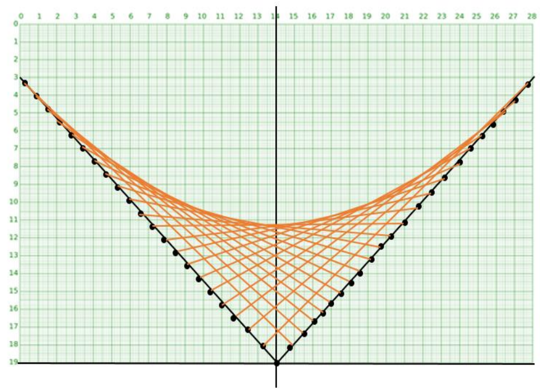
Paso 4. En cada segmento trazado en el paso 3, marca puntos con un centímetro de separación sobre el segmento a partir del punto de intersección, ver siguiente imagen.



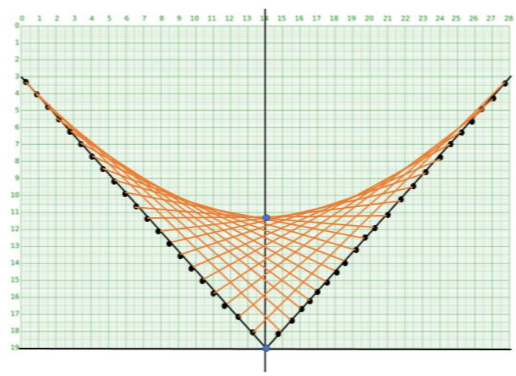
Paso 5. Con los chinches pegue la hoja milimetrada al octavo de cartón paja y luego al icopor.

Inserte los alfileres en cada uno de los puntos marcados en el paso 4.

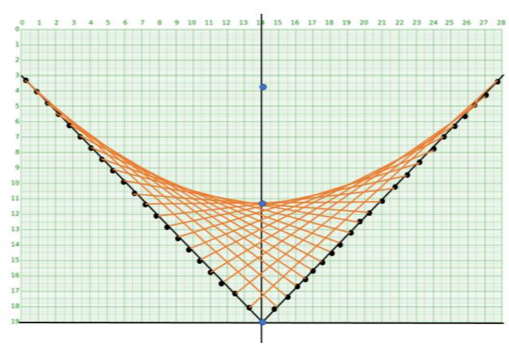
Paso 6. Ate un hilo al último alfiler de uno de los segmentos y páselo por el primer alfiler del segmento contrario, luego páselo por el penúltimo alfiler del segmento inicial y posteriormente por el segundo alfiler del segmento contrario y así sucesivamente hasta completar todos los alfileres atando el hilo al último alfiler, ver la siguiente ilustración.



Paso 7. Ubique un punto en la intersección entre la gráfica obtenida y el segmento vertical.



Paso 8. Tome la distancia entre el punto trazado en el paso 7 y paso 1, y a partir del punto trazado en el paso 7 ubique con la misma distancia otro punto sobre este mismo segmento



Con base en lo anterior responda: Describa la gráfica que se obtiene y a qué gráfica (sección cónica) se asemeja lo obtenido

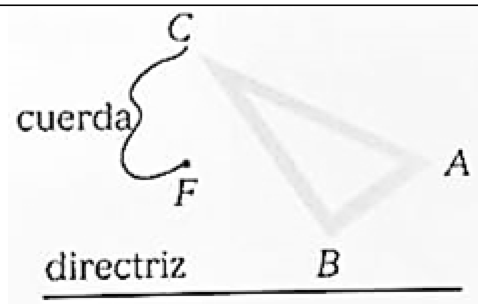
8.3 Anexo 3. Estrategia didáctica 2

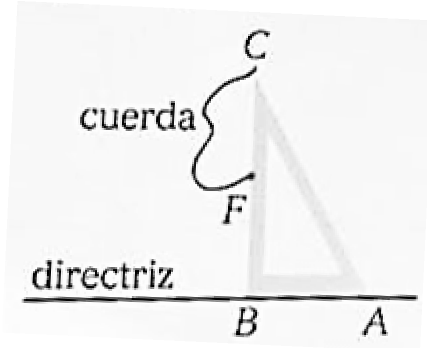
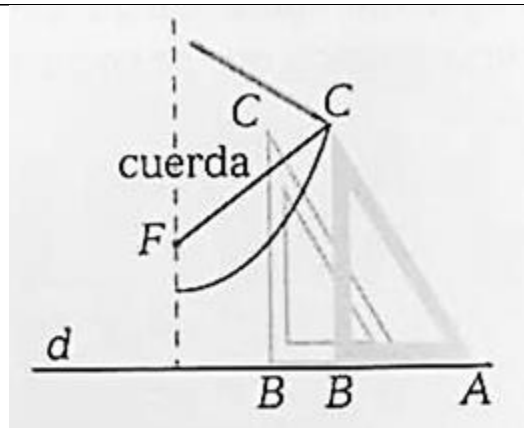
Construcción gráfica de la parábola

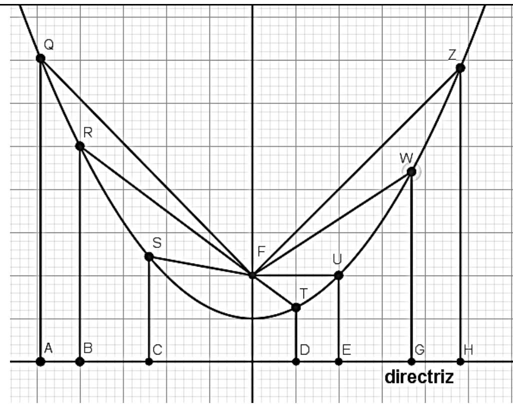
Objetivo: Representar la parábola en forma gráfica y describirla

Actividades.

1. En la siguiente tabla se describe parcialmente el proceso de construcción de una figura geométrica. Con la ayuda de una escuadra, lápiz y una cuerda, complete los procedimientos y representaciones gráficas faltantes.

Procedimientos	**Gráfica**	**Validez de enunciado o de la gráfica**
a. Sobre una hoja de papel se traza una línea recta d (directriz) y se ubica un punto F (foco) que no pertenezca a d.		
b. Los nombres de los vértices de la escuadra se nombran ABC, asignándole B al ángulo recto y a los restantes A y C respectivamente. Un extremo de la cuerda se ubica en el punto C. La longitud de la cuerda es BC. El otro extremo de la cuerda se coloca sobre el punto F.		

c.		
d. Con la punta de un lápiz se mantiene tensa la cuerda y se hace un trazo sobre el papel, a medida que la escuadra se desplaza hacia la derecha sobre la recta d.		
e. Con la punta de un lápiz se mantiene tensa la cuerda y se hace un trazo sobre el papel, a medida que la escuadra se desplaza hacia la izquierda sobre la recta d.		
f. Se ubica un punto P sobre la curva y se traza un segmento de P a R, luego se traza un segmento desde R hasta la recta directriz que sea perpendicular a esta.		

g.		

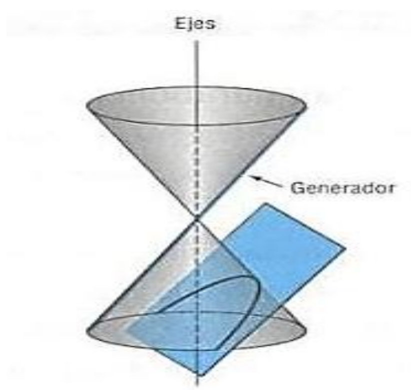
2. Reúnase con un compañero, compare cada uno de los procedimientos con su respectiva gráfica, validen y describan si estos corresponden a la representación gráfica.

3. En un pliego de papel realice todos los procedimientos descritos en la tabla.

4. Según la gráfica del ítem **g** de la actividad 1, halle y compare las distancias de $\overline{QF}$ y de $\overline{QA}$. De manera similar, halle y compare las distancias del Foco (F) a los demás puntos (P, R, S, T, U, W, Z) que pertenecen a la curva, con las distancias de estos puntos a la recta directriz. Saque una conclusión.

5. Describa el lugar geométrico obtenido luego de realizar su representación gráfica.

6. Al realizar un corte paralelo a la generatriz con un plano a un cono recto, ¿Qué lugar geométrico resulta? Explique su respuesta.



Fuente: tomado de
ttps://www.google.com.co/search?q=corte+en+un+cono&rlz=1C1CHBF_esCO808CO808&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwiqibXE1ODdAhUEwlkKHaEdCh4Q_AUICigB&biw=1366&bih=608#imgdii=-bf5JYKcbOrv5M:&imgrc=xPdv9ru6MT4ghM

8.4 Anexo 4. Estrategia didáctica 3.

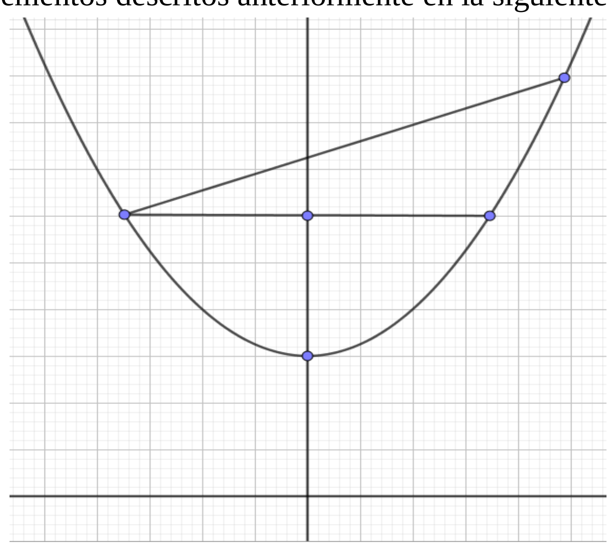
Representación de los elementos de la parábola

Objetivo: realizar la actividad de tratamiento en el registro gráfico y de conversión del registro verbal al gráfico

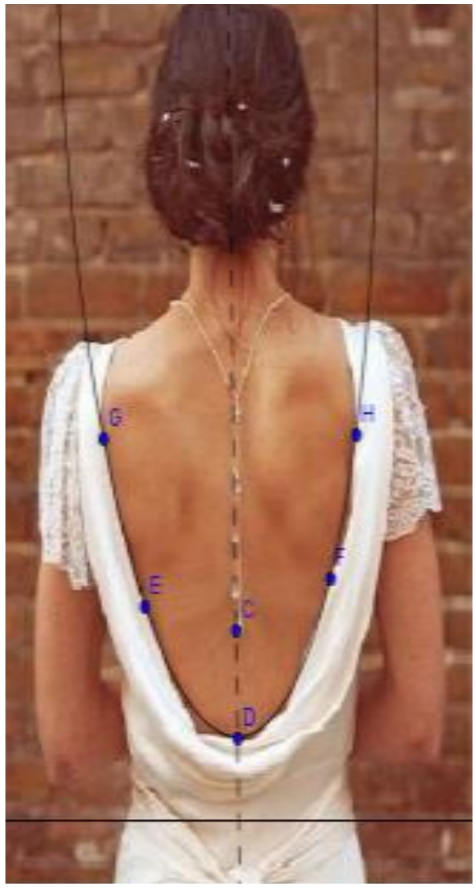
Una parábola se define como el conjunto de puntos (x, y) equidistante de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz (Moreno y Restrepo, 2001). Los elementos de la parábola son:

Eje de simetría: recta vertical que divide la figura en dos partes congruentes también es denominado eje focal.
Vértice ($\boldsymbol{V}$): punto de intersección entre la curva y el eje de simetría, además es el punto medio entre la recta directriz y el foco.
Foco ($\boldsymbol{F}$): punto fijo situado sobre el eje de simetría que se encuentra a una distancia p del vértice.
Directriz ($\boldsymbol{d}$): recta perpendicular al eje de simetría que se encuentra a una distancia p del vértice.
Distancia focal ($\boldsymbol{p}$): es la distancia entre el foco y el vértice
Lado recto ($\boldsymbol{LR}$): es una cuerda paralela a la directriz y perpendicular al eje de simetría que pasa por el foco. Su valor es cuatro veces la distancia focal.
Cuerda: línea recta que une dos puntos cualesquiera de la curva.
Actividades

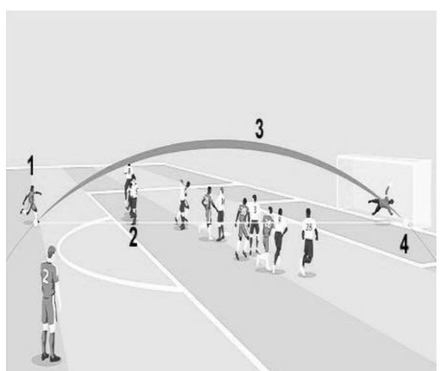
1. Ubique los elementos descritos anteriormente en la siguiente figura.



2. Encontramos en nuestro entorno diferentes figuras que tienen la forma de parábola. Algunos ejemplos se muestran a continuación. Ubique en estos los elementos de la parábola.



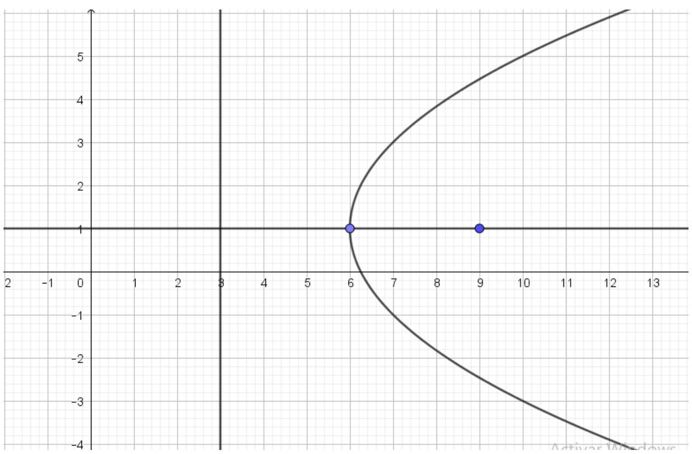
Fuente: tomado de (Beltran, 2016)



Fuente:https://www.google.com.co/search?tbm=isch&sa=1&ei=QIevW7HID8nV5gLPoovIBg&q=objetos+en+forma+de+parabola&oq=objetos+en+forma+de+parabola&gs_l=img.3...0.0.0.69665.0.0.0.0.0.0.0.0..0.0....0...1c..64.img..0.0.0....0.8Khb1ICDqK8#imgrc=r6EjYx49AhqR5M:

Fuente:https://www.google.com.co/search?tbm=isch&sa=1&ei=QIevW7HID8nV5gLPoovIBg&q=objetos+en+forma+de+parabola&oq=objetos+en+forma+de+parabola&gs_l=img.3...0.0.0.69665.0.0.0.0.0.0.0.0..0.0....0...1c..64.img..0.0.0....0.8Khb1ICDqK8#imgrc=SyEa5sL2VdDH4M:

3. Determine los elementos de la parábola a partir de la figura.



4. Realice la representación gráfica de una parábola que cumpla con las siguientes condiciones: su eje de simetría sea el eje x, las coordenadas de f son $(3{,}0)$ y la distancia focal es 3.

Luego identifique:

a. ¿Hacia dónde se orienta la parábola? ¿explique?
b. Identificar las coordenadas del vértice.
c. Escribir la ecuación de la directriz.
d. Determinar la longitud del lado recto.

8.5 Anexo 5. Estrategia didáctica 4.

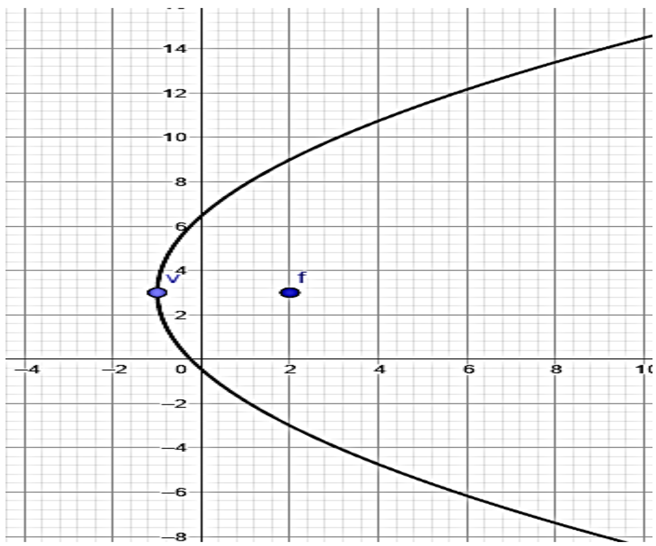
Representación verbal, algebraica y gráfica de la parábola

Objetivo: desarrollar la actividad de tratamiento en el registro algebraico y la conversión entre este registro y los demás registros (verbal y gráfico).

Actividades:

1. Reconstruya los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1: Determine la ecuación general de la parábola a partir de su representación gráfica



Primero, se tiene que el vértice es $v(-1,3)$ y el foco es $f(2,3)$. Como $v(-1,3) = v(h,k)$ entonces $h = -1$ y $k = 3$; además como p es la distancia que hay del vértice al foco y del vértice a la directriz entonces $p = 3$ y la directriz es $x = -4$.

Segundo, se plantea la ecuación canónica para esto se debe tener en cuenta hacia donde abre la parábola.

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ la parábola abre hacia la derecha.

$(y-k)^2 = -4p(x-h)$ la parábola abre hacia la izquierda.

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ la parábola abre hacia arriba.

$(x-h)^2 = -4p(y-k)$ la parábola abre hacia abajo.

Como la parábola abre hacia la derecha se usa la ecuación $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ ecuación canónica,

$(y-3)^2 = 4(3)(x-(-1))$ se reemplazan las coordenadas del vértice y de p,

$y^2 - 6y + 9 = 12(x+1)$ se resuelve el binomio al cuadrado y se multiplica,

$y^2 - 6y + 9 = 12x + 12$ se eliminan paréntesis,

$y^2 - 6y - 12x - 3 = 0$ se iguala a cero,

Finalmente, la ecuación general de la parábola es: $y^2 - 6y - 12x - 3 = 0$, con el vértice $v(-1{,}3)$, foco es $f(2{,}3)$ y su directriz es $x = -4$.

Ejemplo 2: Determine el vértice, foco y la ecuación de la directriz, la ecuación canónica de la parábola $4y^2 - 2y + 4x - 33 = 0$. Realice su representación gráfica.

Primero, se pasa la ecuación general a la ecuación canónica, para esto se hace:

$4y^2 - 2y + 4x - 33 = 0$

$4y^2 - 2y = -4x + 33$

$4(y^2 - \frac{1}{2}y) = -4x + 33$ se factoriza,

$4(y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}) = -4x + 33 + \frac{1}{4}$ se completa un trinomio cuadrado perfecto,

$4\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = -4x + \frac{133}{4}$ se factoriza y se realizan las operaciones,

$\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{-4x + \frac{33}{4}}{4}$

$\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = -1\left(x - \frac{133}{16}\right)$ se factoriza,

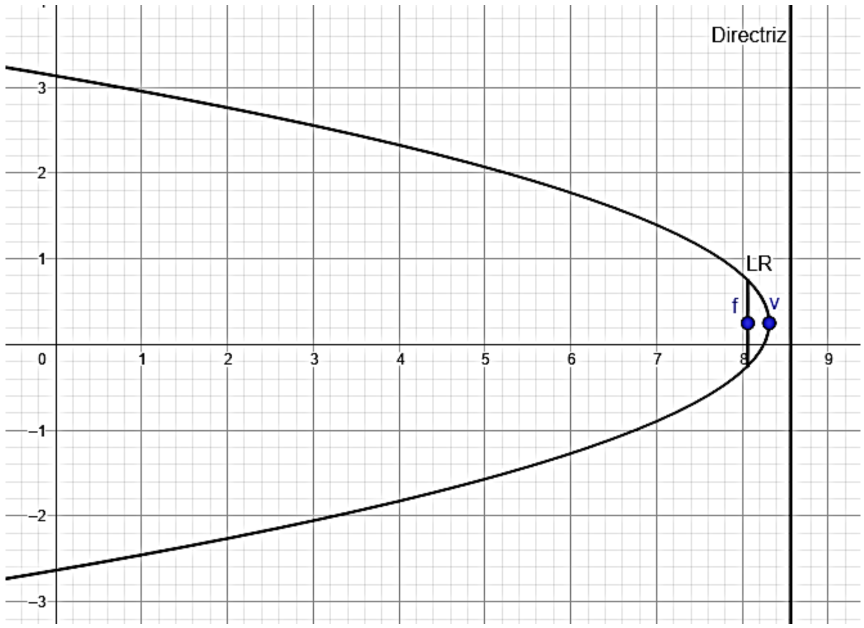
El vértice es $\left(\frac{133}{16}, \frac{1}{4}\right)$

Segundo, para determinar el foco se halla el valor de $|p|$

$4p = -1$, entonces $p = \frac{1}{4}$; como el valor de p es la distancia que hay del vértice al foco, entonces las coordenadas del foco son $\left(\frac{129}{16}, \frac{1}{4}\right)$.

Finalmente, se halla la ecuación de la directriz, se debe tener en cuenta que el valor de p también es la distancia que hay del vértice a la directriz, es decir que la directriz es $x = \frac{137}{16}$.

Para realizar la gráfica se deben tener en cuenta todos los elementos de dicha parábola; su vértice es $\left(\frac{133}{16}, \frac{1}{4}\right)$, foco $\left(\frac{129}{16}, \frac{1}{4}\right)$, la directriz $x = \frac{137}{16}$ y para hallar la longitud del lado recto se hace $LR = 4p$, por tanto $LR = 1$; posteriormente se ubican en el plano cartesiano y se traza la curva que cumple con la definición de la parábola, conjunto de puntos (x, y) equidistante de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz (Moreno y Restrepo, 2001).



Ejemplo 3: Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice es $(-4{,}1)$ y foco $(-4{,}1)$. Describa este lugar geométrico.

Primero, se tiene que el vértice y foco son $(-4{,}1)$ y $(-4{,}1)$, respectivamente, entonces de ahí se analiza la distancia entre estos dos puntos que es 2, es decir que $p = 2$ por lo tanto su directriz es $x = -4$.

Segundo, se identifica hacia donde abre esa parábola, como la parábola abre hacia abajo entonces la ecuación que corresponde a esta, es $(x-h)^2 = -4p(y-k)$. Se reemplazan las coordenadas del vértice$(-4{,}1)$ y el valor de $p = 2$ en esta ecuación.

$$(x-(-4))^2 = -4(2)(y-1)$$

Finalmente, se realizan las operaciones y los procedimientos correspondientes:

$$(x+4)^2 = -8(y-1)$$
$$x^2 + 8x + 16 = -8y + 8$$
$$x^2 + 8x + 8y + 8 = 0$$

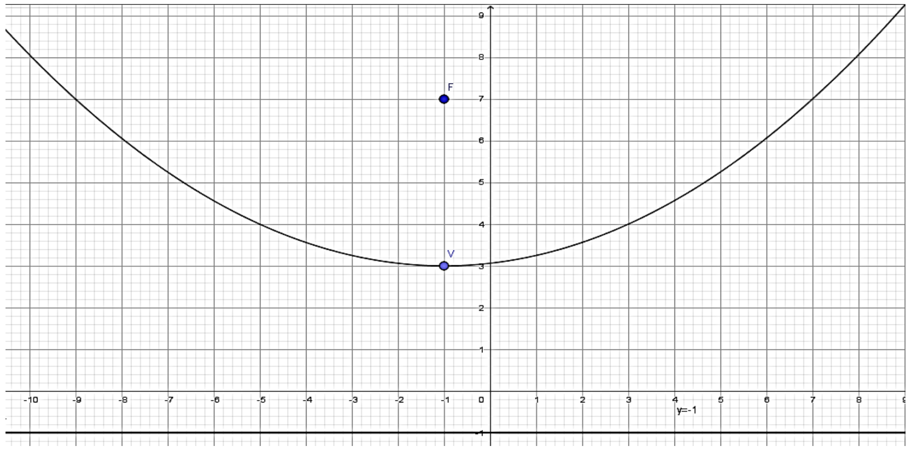
Por tanto la ecuación general es: $x^2 + 8x + 8y + 8 = 0$. La descripción es: la parábola $x^2 + 8x + 8y + 8 = 0$ abre hacia abajo; vértice es $(-4{,}1)$, foco $(-4{,}1)$, directriz $x = -4$ y la longitud de su lado recto es 8.

2. Resuelva los siguientes ejercicios.

2.1 Dada la ecuación general de la parábola $x^2 + 8x + 8y + 40 = 0$, transfórmela a la ecuación canónica.

2.2 Describa el lugar geométrico que representa la siguiente ecuación y menciona las características de dicho lugar geométrico $y^2 - 6y - 4x + 9 = 0$.

2.3 A partir de la siguiente gráfica determina la ecuación general de la parábola, la ecuación de la su directriz y la longitud de su lado recto.



2.4 Halle la ecuación general de la parábola que abre hacia abajo, cuyo vértice es el punto $(-4,-3)$ y cuyo foco es el punto $(-4,-5)$.

2.5 Dada la ecuación de la parábola $4y^2 - 16x - 4y - 7 = 0$, hallar las coordenadas del vértice y del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto, luego realizar su representación gráfica.

2.6 Un puente es construido en forma de arco parabólico y tiene una extensión de 2.000 m. La altura del arco a una distancia de 560 m desde el centro mide 320m. encontrar la altura del arco en su centro. Tomado del libro matemáticas 10. (Lida Buitrago García) (p.116)

8.6 Anexo 6. Entrevistas de los estudiantes sobre el desarrollo del cuestionario

Para la transcripción de las entrevistas se utilizó las siguientes nomenclaturas: ENT: entrevista, INV: investigador y E1 hasta el E6 los estudiantes que fueron identificados con este seudónimo.

8.6.1 ENT E1

1. INV: La primera actividad decía describa el lugar geométrico parábola ¿Que argumentaste al respecto?
2. E1: Sección cónica en que cada punto es equidistante de la directriz como del foco.
3. INV: Y eso, ¿qué significa?
4. E1: Ósea que cada punto ubicado en la parábola tiene la misma distancia tanto para el foco, como para la directriz.
5. INV: En la segunda tarea, ¿cuál fue el proceso realizado para encontrar la ecuación general de la parábola, para transformarla en su ecuación canónica?
6. E1: primero puse las y a un lado y las x al otro lado, y complete el trinomio cuadrado perfecto, después lo agrupe y al otra lado saque factor común y ya.
7. INV: ¿cómo completaste el binomio cuadrado perfecto?
8. E1: pues como
9. INV: Tú dices que trinomio cuadrado perfecto.
10. E1: Trinomio cuadrado perfecto.
11. INV: ¿Trinomio cuadrado perfecto? y ¿por qué es un trinomio cuadrado perfecto?
12. E1: porque es la suma elevado a la dos.
13. INV: Eso, y ¿qué te dio como resultado?
14. E1: Eeee $(y+5)^2 = 16(x+1)$
15. INV: y ¿por qué dices que esa es la ecuación canónica?
16. E1: porque pues es la que está en la forma$(y+h)^2 = 4p(x+k)$, bueno está en esa forma.
17. INV: en la tercera actividad, ¿cómo llegaste a la representación gráfica de la parábola dada su representación canónica?
18. E1: primero saque el vértice, que sería pues cambiándole los signos, entonces la x quedaria -3 y la y 2, y después eee la p la saque porque antes del parentesis habia un menos cuatro entonces daría que la p igual a -1, entonces pues ubique el vértice, la directriz y el foco, y después la grafique.
19. INV: ¿cómo supiste que abría hacia abajo esa parábola?
20. E1: porque mmm
21. INV: y no hacia la izquierda ni la derecha o hacia arriba
22. E1: porque empezaba con x más un número, entonces el eje de simetría era ubicado en x, entonces pues era para arriba o para abajo, y como el mmm la p era negativa entonces abría hacia abajo.
23. INV: como determinaste la ecuación en el ejercicio, como la dibujaste y por qué iba a ser ahí en y igual a uno.
24. E1: porque tenía que tener la distancia de p, entonces tenía que tener una unidad más arriba, porque si abría hacia abajo tenía que tener una unidad más abajo.
25. INV: ¿la distancia de p?
26. E1: si, del vértice a la directriz.

27. INV: ¿del vértice a la directriz?
28. E1: ujum.
29. INV: en la actividad 4, ¿cómo hizo para describir el lugar geométrico a partir de su ecuación?
30. E1: pues primero saque los elementos, entonces primero pase la ecuación general a una canónica, pues ahí pude sacar la p y el vértice, y pues ahí hice como los cálculos para sacar el foco y la directriz, y pues lo describí en palabras.
31. INV: ¿y cómo lo escribiste?
32. E1: la parábola abre hacia la derecha, su vértice es (-1.3), su foco está ubicado en $(0,3)$ y su lado recto es 12, la directriz se ubica en $x = 1$.
33. INV: ¿y cómo hiciste para determinar que abría hacia la derecha?
34. E1: porque la ecuación canónica empezaba por y y la p era positiva.
35. INV: en la actividad cinco, a partir de la gráfica ¿cómo determino los elementos de la parábola?
36. E1: ee pues primero los escribí aparte como el vértice, el foco y eso, y escribí pues conté la distancia entre el vértice y el foco para sacar p, y despues con esos datos hice la ecuacion canonica, la pase a la general y pues también se podía ver la ecuación de la directriz y pues la distancia del lado recto.
37. INV: en la actividad 6, ¿cuál fue el proceso que realizó para encontrar la ecuación general?
38. E1: eeee mmm desarrollo ee, bueno ubique primero los datos del vértice y de la pe en la ecuación canónica y después desarrolle el trinomio cuadrado perfecto y el factor común para sacar la general.
39. INV: ¿cómo determinaste el valor de p?
40. E1: por la distancia entre el vértice y el foco.
41. INV: en la actividad siete, ¿cómo se determina los elementos de la parábola dada su ecuación general?
42. E1: bueno primero la pase a la canónica, para pues ahí sacar el vértice, para que lado abría, la directriz, pues la distancia del vértice y la directriz y ya, y el lado recto.
43. INV: ¿cómo determinaste hacia dónde abría?
44. E1: porque la ecuación empezaba con la y y en la p era positiva.
45. INV: ¿hacia dónde abre esa parábola?
46. E1: Hacia la derecha.
47. INV: ¿cómo determinaste la ecuación de la directriz?
48. E1: por, bueno primero la ubique por la p que era tres unidades, entonces pues es el punto menor al termino cinco y de ahí en x.
49. INV: ¿por que $x = -5$?.
50. E1: porque mmm eee pues si la parábola abre para la derecha tiene que estar ubicada la directriz en x, y pues por lo de las unidades también lo podría decir.
51. INV: ¿qué significa que x sea igual a cinco?
52. E1: a menos cinco.
53. INV: a menos cinco, perdón.
54. E1: que la directriz esta paralela al eje y pero ubicada en menos cinco.
55. INV: en la actividad ocho, ¿cómo realizó la representación gráfica en la parábola a partir de las condiciones dadas?

56. E1: primero ubique el vértice y después puse el foco a la distancia de dos unidades y la directriz pues decía que estaba ubicada en $x = 0$ y después la grafique.
57. INV: ¿cómo ubicaste el $x = 0$?
58. E1: pues igual el vértice como estaba en $x = 2$ y la distancia era dos pues ya sabía que era cero.
59. INV: como determinaste que esta parábola abría hacia la derecha y no hacia la izquierda?
60. E1: porque la distancia entre el vértice y el foco, ósea el foco estaba más hacia la derecha y el vértice más hacia la izquierda, y pues si la directriz estaba más hacia la izquierda del vértice y el vértice es en la mitad, entonces abría para la derecha.
61. INV: en el punto nueve la tarea consistía que a partir dela grafica describa cuales son los elementos de la parábola y cuáles son sus coordenadas, ¿cómo hiciste este proceso?
62. E1: ubique el vértice y el foco, y después la ecuación de la directriz y de la recta y después lo describí en mis palabras, entonces quedo: el vértice es $(6,1)$, su foco esta ubicado en $(4,1)$ y la ecuacion de su directriz es $x = 8$, abre hacia la izquierda y su lado recto es 8.
63. INV: ¿cómo verificaste que el lado recto es igual a 8?
64. E1: porque el lado recto es igual a 4 p y p que era la distancia entre le vertice y el foco era dos, entonces queda cuatro por dos igual a ocho.
65. INV: ¿y cómo determinaste que la ecuación de la directriz era x=8?
66. E1: porque en la gráfica se puede ver que está ubicada a 2 unidades del vértice, entonces quedaría en ocho.
67. INV: por que $x = 8$ y no $y = 8$?
68. E1: porque esta paralela al eje y pero ubicada en 8.
69. INV: en la actividad diez, ¿cuál fue el análisis que hizo para solucionar el problema?
70. E1: pues que el primero la altura máxima está ubicada pues en el vértice de la parábola y el alcance horizontal es donde termina la parábola, entonces ubique el vértice que sería $(5, -4)$ porque con la ecuación general la pase a canónica y pues ahí supe el vértice después era saber el máximo alcance horizontal donde terminara la parábola eee fue 8 pues porque el vértice estaba en 4 y era la mitad, entonces completa seria 8.
71. INV: esta representación algebraica o esta ecuación, ¿cómo identificas que es de una parábola?, ¿porque tú dices que hallaste el vértice de la parábola o la trayectoria de esa, porque es similar a la de una parábola?
72. E1: porque tiene x a la dos x y y, y esta igualada a cero, entonces pues son los elementos de una parábola.
73. INV: ¿cuánto te dio la altura máxima? ¿Por qué?
74. E1: fue de 5 metros porque fue, mmm no porque me quedo mal, ahora que lo pienso.
75. INV: ¿por qué?
76. E1: porque la altura máxima seria en y y seria 4.
77. INV: ¿y por qué aparece ahí -4?
78. E1: porque en la canónica aparecía +4 y pues el vértice seria al revés.
79. INV: pero, ¿puede existir una altura negativa? ¿que significa que sea menos 4?
80. E1: no, -4 significaría que fue lanzada hacia abaja, pero pues claramente no puede ser así, entonces no sé.
81. INV: ¿y el máximo alcance cuanto te dio?
82. E1: puse que era 8, pero pues ahora por lo que te digo seria 10.

83. INV: ¿Por qué 10?

84. E1: porque en x dio 5, entonces por lo que te dije el vértice estaba en la mitad de toda la trayectoria entonces sería el doble de x entonces seria 10.

85. INV: gracias.

8.6.2 ENT E2

86. INV: La primera actividad decía describa el lugar geométrico parábola. ¿Tú qué argumentaste al respecto?

87. E2: yo escribí que la parábola es un lugar geométrico compuesto por todos los puntos, que están a la misma distancia, que x está en un punto fijo en una línea recta.

88. INV: Y eso, ¿qué significa?

89. E2: que la parábola está compuesta, pues ósea para realizar una parábola se tiene obviamente el plano cartesiano se ubica un punto fijo y se tiene en cuanta una línea recta a la cual se llama directriz, todos aquellos puntos que se sumen la misma distancia entre ellos son los que forman la parábola.

90. INV: En la segunda actividad, ¿cuál fue el proceso realizado?

91. E2: se pide la, te dan la ecuación general y te piden la canónica, entonces te dice que la ecuación general de la forma $y^2 + 10y - 16x + 9 = 0$, entonces lo que se hace es primero completar el cuadrado al lado de la y, se completa con un 25 y pues igual al otro lado se tiene que hacer lo mismo añadir un 25, al factorizar queda $(y + 5)^2 = 16x + 16$, igual al este lado se saca factor común entonces la ecuación canónica de la parábola es $(y + 5)^2 = 16(x + 1)$.

92. INV: ¿por qué consideras que esta es la ecuación canónica?

93. E2: pues la canónica es la que se tiene en cuenta la ubicación del vértice y la orientación de la parábola.

94. INV: En la tercera actividad, ¿cómo llegaste a la representación gráfica de la parábola dada su representación canónica?

95. E2: dada la ecuación primero se tiene en cuanta a los factores que acompañan la ecuación x y y, y teniendo en cuenta estos se saca el vértice, el lado recto se saca pues por el número que está acompañando acá al lado de la y, se despeja, se halla la distancia de p, entonces el vertice teniendo en cuanta a p como dice que es negativo entonces la parábola abre hacia abajo, entonces respecto al vértice se toma esa distancia de p hacia abajo para ubicar el foco y hacia arriba para ubicar la directriz.

96. INV: ¿por qué hacia arriba para ubicar la directriz?

97. E2: porque si p es negativo la parábola abre hacia abajo, por lo tanto el foco va a estar hacia abajo porque el foco siempre va como adentro de la parábola entonces para el otro lado si seria para arriba va la directriz.

98. INV: En la cuarta actividad ¿cómo hiciste para describir el lugar geométrico a partir de su ecuación?

99. E2: Bueno se da la ecuación general, entonces primero hay que pasarla a la canónica, al pasarla a la canónica se puede identificar el vértice y teniendo en cuenta si p es negativo o positivo se puede decir que si abre hacia la derecha o la izquierda, se ubica el vértice y pues ya ubique los puntos y teniendo en cuenta la distancia que da p se ubica la directriz y las coordenadas del foco.

100. INV: Listo, ¿por qué dijiste que abre hacia la derecha y no hacia arriba o hacia abajo?

101. E2: porque la ecuación canoníca como la incógnita x esta elevada al cuadrado y no y, entonces eso significa que la parábola es horizontal y que puede abrir hacia la derecha o hacia la izquierda.
102. INV: en la quinta actividad, a partir de la gráfica ¿cómo determinó los elementos de la parábola?
103. E2: a partir de la gráfica bueno se tienen ósea primero para la ecuación se tienen que tener en cuenta la directriz que en este caso es $y = 6$, la longitud del lado recto que es la distancia de aca a aca pasando por el foco, mmm y definiendo esto se reemplaza esto en la formula canónica de la parábola, entonces al reemplazar el vértice queda $(x - 3)^2 = -8$ que es el lado recto factor de $(y - 4)$.
104. INV: en la sexta actividad, ¿cuál fue el proceso que realizó para encontrar la ecuación general?
105. E2: eeee mmm bueno, primero teniendo en cuenta que nos dan el vértice y el foco mm se ubican, entonces por lo tanto ya puede identificar hacia donde abre y de qué forma es la parábola, entonces ya lo único que queda es reemplazar con la coordenada del vértice y hallar el lado recto.
106. INV: ¿cómo reemplazaste? ¿cómo llegaste a la ecuación?
107. E2: a mm ósea mira primero se llega a la canónica, que es donde se reemplaza el vértice, se halla el lado recto teniendo en cuenta la distancia del vértice al foco, entonces después para llegar a la general se desarrollan los cuadrados, entonces en la primera parte me quedan $y^2 + 8y + 16$ igual a entonces aquie es donde se realiza la multiplicacion de $12x - 36$, entonces despues lo que se busca es igualar a cero, entonces los que estan a este lado pasan al otro lado con el signo contrario se organiza y pues queda $y^2 + 8y - 12x + 52 = 0$.
108. INV: cuando tú dices se desarrollan los cuadrados, ¿qué significa?
109. E2: Que es como realizar la multiplicación de $y + 4$ por $y + 4$, enotnces va el primero al cuadrado queda ya a la dos, despues se multiplica dos veces el primero por el segundo lo que da $8y$ y al final el segundo numero se eleva al cuadrado queda 16.
110. INV: en la tarea siete, ¿cómo se determina los elementos de la parábola dada su ecuación y como se llega a su representación gráfica?
111. E2: mmm bueno dada la ecuación que es la general se busca primero que todo pasar a la canónica, en la canónica ya se puede identificar la ubicación del vértice y el anchor y pues la longitud del lado recto, y pues con esto ya se puede saber si la parábola es horizontal o vertical , hacía que lado Abre y pues como cuál es la longitud del lado recto teniendo la distancia del vértice al foco, no mentiras, a partir de la medida del lado recto se puede hallar la medida de p la distancia del vértice al foco, y así mismo se da la directriz, se hallan las ecuaciones.
112. INV: y ¿cómo escribiste la ecuación de la directriz? ¿por qué $x = -5$?
113. E2: la ecuación de la directriz es $x = -5$ porque la directriz esta de forma vertical, es decir que todos los valores van a ser en $x = -5$ y pues a medida que va aumentando en y.
114. INV: para la actividad número ocho, ¿cómo realizó la representación gráfica en la parábola a partir de las condiciones dadas?
115. E2: Bueno primero que todo entonces nos dan el vértice y el foco, entonces ya he hice que la parábola es horizontal y abre hacia la derecha, la ecuación de la directriz que es por el eje y porque x toma siempre los valores de cero y me dice que el lado recto mide

ocho, entonces esto me indica que entonces a partir del foco tengo que contar 4 unidades hacia arriba y hacia abajo entonces debo trazar la parábola que pase tanto por el vértice como por los dos puntos que obtuve procurando que como quede la forma de la parábola y que se cumpla la condición dada de que esos puntos equidistan tanto de la directriz como del foco.

116. INV: ¿cómo decidiste que la parábola abría hacia la derecha y no hacia la izquierda?

117. E2: pues se ubican las coordenadas del vértice que me dicen que es $(0,1)$, despues las del foco que es $(4,1)$ que esta ubicado mas a la derecha del foco y teniendo en cuanta la ecuación de la directriz que es $x = 0$ que ma da a la izqueirda del vertice enonces ya seque es horizontal y pues se determina que abre hacia la derecha porque la forma de la parábola tiene encerrada el foco, es decir el foco debe estar adentro de la parábola, entonces por eso se dice que abre hacia lado.

118. INV: la actividad 9, consistía que a partir dela grafica describa cuales son los elementos, ¿cómo hiciste para describir estos elementos?

119. E2: mm bueno entonces a partir de la gráfica se puede identificar el vértice que me lo dan ahí, el foco y pues la ecuación de la directriz que en este caso es vertical donde x tomo siempre los valores de ocho, entonces para hallar la ecuación canónica reemplazo los puntos del vértice y calculo la medida de la recta teniendo en cuanta la distancia que hay del foco al vértice, entonces la ecuación canónica me queda que $(y-1)^2 = -8(x-6)$ y asi mismo me piden la ecuacion general para la cual debo desarrollar los cuadrados e igualar a cero, entonces se desarrollan los cuadrados aquí en la primera parte lo que me da $y^2 - 2y + 1$ igual a entonces a este lado se desarrolla la multiplicación entonces me queda $-8x + 48$ como busco igualar a cero tengo que pasar estos términos al otro lado entonces me queda $y^2 - 2y + 8x - 47 = 0$.

120. INV: en la actividad 10, ¿cuál fue el análisis que hizo para solucionar el problema?

121. E1: mm bueno dice que la trayectoria de una pelota de golf está dada por bueno esta expresión, y por la tanto bueno y que la trayectoria tiene forma como de parábola, entonces preguntan la altura máxima que alcanza esta pelota, la altura máxima vendría siendo como le vértice de la parábola que es y el máximo alcance horizontal podría ser medido como el lado recto de la parábola, entonces teniendo en cuenta esto y pues la expresión que nos dan sea a pues nos dan la ecuación general entonces se busca llegar a la ecuación de la canónica para identificar el punto del vértice al realizar este despeje me da que la ecuación canónica $(x-5)^2 = -25/4$ factor de $(y-4)$ entonces puedo identificar que el vértice es $(5,4)$ por lo tanto se toma el valor que este punto tiene en y que es 4 metros por lo tanto esa sera la altura maxima a la que llegue la pelota y para el alcance horizontal se tiene en cuenta la parte en x de la cordenada del vertice, en este caso es 5 entonces como que se despeja el vértice está ubicado en la mitad de la parábola entonces para el alcance horizontal tendríamos que tomar dos veces esta distancia por lo tanto el máximo alcance horizontal de la pelota seria 10 metros.

122. INV: ¿cómo decidiste que la trayectoria era parabólica, tenía forma de parábola, si en el enunciado no dice en ningún lado que tiene forma de parábola?

123. E1: debido a la forma de la ecuación que me da ósea para poder completar un trinomio cuadrado perfecto en la x y para poder factorizar acá la y y que me permita ósea cumple con la estructura de la ecuación de una parábola.

124. INV: gracias.

8.6.3 ENT E3

125. INV: en la actividad uno decía: ¿describa el lugar geométrico parábola, ¿tú qué argumentaste al respecto?
126. E3: es un lugar geométrico en que los puntos están ubicados a la misma distancia del eje de simetría, está compuesto por el vértice, el foco, la directriz y el lado recto.
127. INV: y eso ¿qué significa?
128. E3: significa que todos los puntos de la parábola están a la misma distancia del eje de simetría.
129. INV: cuando tú dices que es un lugar geométrico, ¿porque es un lugar geométrico?
130. E3: porque es una secuencia de puntos
131. INV: En la actividad dos, ¿cuál fue el proceso realizado para transformar la ecuación general a la canónica?
132. E3: pues a partir de la ecuación general la transforme a la canónica haciendo despejes y factorizando.
133. INV: ¿por qué razón?
134. E3: porque hay que llegar a la forma $(y-k)^2 = 4p(x-h)$
135. INV: ¿qué obtuviste como resultado?
136. E3: $(y+5)^{\,2} = 16(x+1)$
137. INV: en la actividad tres, ¿cómo llegaste a la representación gráfica de la parábola dada su ecuación canónica?
138. E3: determine el vértice, después halle p y luego saque el foco.
139. INV: ¿Para qué hallaste p?
140. E3: porque para hallar el foco se tiene que saber p porque es la distancia que hay del vértice al foco y a la directriz.
141. INV: ¿cómo dedujiste que la parábola abría hacia abajo?
142. E3: porque x esta al cuadrado y y no, eso quiere decir que puede abrir hacia arriba o hacia abajo, pero esta negativo entonces abre hacia abajo.
143. INV: en la actividad 4, dice: describa el lugar geométrico que representa la siguiente ecuación $y^2 - 6y - 12x - 3 = 0$ mencione sus elementos y ¿cómo hizo para describir el lugar geométrico a partir de la ecuación?
144. E3: pasé la ecuación general a la canónica para determinar el vértice, foco, directriz y el lado recto, y a partir de eso deduje que abría hacia la derecha.
145. INV: ¿cómo describe ese lugar geométrico?
146. E3: pues que es una parábola que abre hacia la derecha donde su vértice es la ecuación anterior corresponde a la ecuación de la parábola con vértice $(-1,3)$ y foco $(-4,3)$ y directriz $x = 2$.
147. INV: abre hacia la derecha, ¿por qué razón abre hacia la derecha y no hacia la izquierda?
148. E3: no se abre a la izquierda porque p es positivo.
149. INV: ¿cómo identificas que la parábola abre hacia la derecha o abre hacia la izquierda o abre hacia arriba o hacia abajo?
150. E3: por las ecuaciones si x está cuadrada abre para arriba o para abajo y si y está cuadrada abre hacia la derecha o izquierda.
151. INV: en la actividad 5 a partir de la gráfica, ¿cómo determina la ecuación de la parábola?

152. E3: identifique para donde abre la parábola y así utilizar la ecuación canónica adecuada luego desarrolle el binomio y las operaciones y por último la iguale a cero.
153. INV: ¿cómo determinaste la ecuación de la directriz?
154. E3: a partir de la gráfica donde se ve que es $y = 6$
155. INV: en la actividad 6, ¿cuál fue el proceso que realizó para encontrar la ecuación general dadas esas condiciones?
156. E3: a partir de los datos que me dieron halle el valor de p y reemplace en la ecuación y resolví las operaciones.
157. INV: ¿qué ecuación obtuviste?
158. E3: $y^{2} - 6y - 12x - 39 = 0$
159. INV: en la actividad 7 ¿cómo determinas los elementos de la parábola dada su ecuación general?
160. E3: deje los términos con y a un lado y al otro x y el termino independiente, luego factorice y complete el trinomio cuadrado perfecto y lo que sume a un lado lo sume al otro y luego volví a factorizar.
161. INV: ¿qué proceso realizó para llegar a la ecuación canónica?
162. E3: primero pase las y a un lado, pase el numero natural con la x, factorice las y, pase el número que me quedaba el 4 al factorizar, lo pase a dividir hice las operaciones y me daba el resultado final.
163. INV: ¿qué obtuviste como resultado?
164. E3: $\left(y - \frac{5}{2}\right)^{2} = 12\,(x + 2)$
165. INV: Con ese resultado ¿cómo hizo la representación gráfica?
166. E3: ubiqué el vértice y para el foco conté 3 puntos hacia la derecha para ubicar el foco y tres para la izquierda para ubicar la directriz. p
167. INV: ¿por qué tres puntos?
168. E3: porque p me dio 3 y esa es la distancia que hay del vértice al foco y del vértice a la directriz.
169. INV: ¿Qué obtuviste como representación gráfica?
170. E3: una parábola que abre hacia la derecha
171. INV: en la actividad 8, ¿cómo realizó la representación gráfica de la parábola, a partir de las condiciones dadas?
172. E3: ubiqué el vértice y el foco y la directriz, y como la longitud del lado recto era 8 a partir del foco conté 4 hacia arriba y 4 hacia abajo.
173. INV: ¿por qué contaste 4 hacia arriba y 4 hacia abajo?
174. E3: porque la parábola abría hacia la derecha entonces el lado recto tenía que ser paralelo a y
175. INV: en la actividad 9, consistía que a partir de la gráfica describa ¿cuáles son los elementos de la parábola? y ¿cuáles son sus coordenadas y ecuaciones?, ¿cuál fue el proceso que hiciste?
176. E3: primero determine el vértice, el foco, también halle valor de p, y luego reemplace en la ecuación canónica y pues la convertí en la ecuación general
177. INV: ¿cómo hiciste esa descripción?
178. E3: que el vértice es (6,1), el foco (4,1), la directriz $x = 8$ y $p = -2$ y pues es una parábola que abre hacia la izquierda y su ecuación general es $y^2 - 2y + 8x - 47 = 0$y su ecuación canónica es $(y - 1)^2 = -8(x - 6)$

179. INV: en la actividad 10, ¿cuál fue el proceso que hiciste para poder solucionar el problema?
180. E3: la verdad no supe que hacer para determinar la ecuación canónica

8.6.4 ENT E4

181. INV: en la actividad uno decía: ¿describa el lugar geométrico parábola, ¿tú qué argumentaste al respecto?
182. E4: una parábola es un lugar geométrico cuya característica es que hay la misma distancia del foco al vértice que del vértice a la directriz.
183. INV: y eso ¿qué significa?
184. E4: p significa la distancia que hay del vértice de la parábola al foco y es la misma que va a haber del vértice a la directriz que es la línea que hay.
185. INV: cuando tú dices que es un lugar geométrico, ¿porque es un lugar geométrico?
186. E4: un lugar geométrico es la secuencia que hay en dos puntos, la secuencia lineal de puntos.
187. INV: ¿que cumplen con qué? ¿Cuál es la característica que mencionas ahí?
188. E4: que es un lugar geométrico cuya característica es que hay la misma distancia del foco al vértice que del vértice a la directriz.
189. INV: En la actividad dos, ¿cuál fue el proceso realizado para transformar la ecuación general a la canónica?
190. E4: pues primero, la ecuación general que es la que está igualada a cero, la pasamos, igualamos primero las y a un lado y x, y el numero natural al otro lado, después hallamos, resolvemos el binomio y dejamos el número que da, y eso como lo pusimos digamos el 25 a un lado, lo vamos a poner al otro lado
191. INV: ¿por qué razón?
192. E4: porque hay que igualarlo, pues ahí se opera y se llega a la ecuación canónica.
193. INV: ¿qué obtuviste como resultado?
194. E4: $(y+5)^{2} = -16(x-1)$
195. INV: en la actividad tres, ¿cómo llegaste a la representación gráfica de la parábola dada su ecuación canónica?
196. E4: pues primero saque el vértice, teniendo en cuenta que hay que cambiar los signos, después, por la forma de la ecuación deduje que se abría hacia abajo, halle p, que es el valor absoluto y empecé a ubicar el foco de acuerdo a la distancia del vértice a p.
197. INV: ¿cómo dedujiste que abría hacia abajo y no hacia arriba o hacia la derecha o hacia la izquierda?
198. E4: por la forma de la ecuación, porque va x y y, eso quiere decir que abre hacia arriba o hacia abajo, y dado que hay un número negativo, entonces va hacia abajo.
199. INV: en la actividad 4, dice: describa el lugar geométrico que representa la siguiente ecuación $y^2-6y-12x-3=0$ mencione sus elementos y ¿cómo hizo para describir el lugar geométrico a partir de la ecuación?
200. E4: primero la despeje de la ecuación general hasta la ecuación canónica, y saque los mismos puntos que en el punto anterior: el vértice, el foco, la directriz, p.
201. INV: ¿cómo describiste ese lugar geométrico?
202. E4: la ecuación anterior corresponde a la ecuación de la parábola con vértice $(3,-1)$ foco $(3,2)$ y directriz $y=4$, por tanto la parábola va a abrir hacia arriba.
203. INV: abre hacia arriba, ¿por qué razón abre hacia arriba y no hacia la derecha?
204. E4: no se abre la derecha porque va y y x.

205. INV: ¿cómo identificas que abre hacia la derecha o abre hacia la izquierda o abre hacia arriba o hacia abajo?
206. E4: de acuerdo a la ecuación va x y y si abre hacia arriba o hacia abajo y va y y x si abre hacia los lados
207. INV: en la actividad 5, a partir de la gráfica, ¿cómo determina los elementos de la parábola?
208. E4: primero se ubica el vértice, cuento la distancia del vértice al foco, que va ser la misma del vértice a la directriz, pues ahí seria p y de acuerdo a los puntos que saco, puedo sacar la ecuación canónica y al despejarla encuentro la general
209. INV: ¿cómo determinaste la ecuación de la directriz?
210. E4: teniendo en cuenta el vértice, que me lo daban, conté dos y teniendo en cuenta que va sobre el eje y
211. INV: ¿Cuál es la ecuación de la directriz?
212. E4: $y = 6$
213. INV: ¿por qué $y = 6$?
214. E4: porque va sobre el eje y
215. INV: en el punto 6, ¿cuál fue el proceso que realizó para encontrar la ecuación general dadas esas condiciones?
216. E4: pues dadas las coordenadas lo que hice fue hallar primero la ecuación canónica y a partir de la canónica la despeje hasta llegar a la general.
217. INV: ¿cómo obtuviste la ecuación general? o ¿qué elementos necesitaste para la ecuación canónica?
218. E4: pues el vértice, que ya me lo daban y teniendo en cuenta la distancia que había entre el vértice y el foco pude hallar p.
219. INV: ¿qué ecuación obtuviste?
220. E4: $y^2 - 6y - 3x - 3 = 0$
221. INV: en la actividad 7 ¿cómo determinas los elementos de la parábola dada su ecuación general?
222. E4: primero la despeje hasta llegar a la ecuación canónica y hay de acuerdo a los elementos que me daban, yo saque el foco, el vértice, la directriz y la ecuación
223. INV: ¿cómo la despejaste?
224. E4: primero pase las y a un lado, pase el numero natural con la x, factorice las y, pase el número que me quedaba el 4 al factorizar, lo pase a dividir hice las operaciones y me daba el resultado final.
225. INV: ¿qué obtuviste como resultado?
226. E4: $\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 12x + 24$
227. INV: Con ese resultado ¿cómo pudiste hallar la representación gráfica?
228. E4: el vértice que me daba, teniendo en cuenta que hay que cambiar los signos, entonces hay lo halle; el foco, teniendo en cuenta P lo ubique, la directriz, también de acuerdo con P, entonces lo ubique a partir del vértice, el lado recto que sería el valor absoluto de $4p$
229. INV: ¿Qué obtuviste como representación gráfica?
230. E4: una parábola que abre hacia la derecha
231. INV: en la actividad 8, ¿cómo realizó la representación gráfica de la parábola, a partir de las condiciones dadas?

232. E4: primero ubique el vértice, también me daban el foco, así que lo ubique y teniendo en cuenta que la distancia es la misma del vértice al foco, también pude ubicar la directriz y el lado recto que me daba 4, pues hay daba 8.
233. INV: ¿por qué esa parábola abre hacia la izquierda y no hacia la derecha?
234. E4: por el foco que me dice que está en $(4{,}1)$, pues el foco siempre debe ir dentro de la parábola.
235. INV: en la actividad 9, consistía que a partir de la gráfica describa ¿cuáles son los elementos de la parábola? y ¿cuáles son sus coordenadas y ecuaciones?, ¿cuál fue el proceso que hiciste?
236. E4: primero halle el vértice, después el foco, también halle el lado recto, y de ahí, ubique esos elementos en la ecuación canónica y pues la despeje en la ecuación general
237. INV: ¿cómo hiciste esa descripción?
238. E4: es una parábola que abre hacia la izquierda, tiene vértice $(6{,}1)$, el foco es $(4{,}1)$, la ecuación de la directriz es $x = 8$
239. INV: en el punto 10, ¿cuál fue el proceso que hiciste para poder solucionar el problema?
240. E4: primero realizar la gráfica, después dada la expresión que me daban empecé a despejarlas, despeje el binomio, después halle la ecuación canónica y teniendo en cuenta que esto al final me iba a dar 5, pues lo sume porque el alcance horizontal seria toda la parábola y me daba 10 y la altura máxima me daba 4.
241. INV: ¿cómo decidiste que el alcance horizontal era 10 y que la altura era 4?
242. E4: porque x me daba -5 y teniendo en cuenta la mitad, entonces sume los dos 5 y me daba 10 y y que era 4, la altura máxima.
243. INV: ¿cómo determinaste que era una parábola?
244. E4: porque era una pelota de golf, que era lanzada, determinaría que era una parábola.

8.6.5 ENT E5

245. INV: en la primera actividad decía: describa el lugar geométrico parábola, ¿tú que argumentaste al respecto?
246. E5: la parábola es un lugar geométrico cuyos puntos están ubicados a la misma distancia del eje de simetría, también que está conformada por el vértice, el foco y la recta, la directriz y el eje de simetría.
247. INV: En la actividad dos, ¿cuál fue el proceso realizado para encontrar la ecuación canónica a la ecuación general?
248. E5: separe las x y las y, por un igual, es decir deje al lado izquierdo las y por orden de cuadrados, primero y^2, y después una y, al otro lado las x y el número que no tiene incógnita, luego complete el trinomio en el lado izquierdo lo complete por las y y el número que estaba sumando al otro lado también lo puse a sumar + 9, al lado de las (x); despeje lo desarrolle, hice las operaciones necesarias y determine la ecuación canónica.
249. INV: ¿qué obtuviste como ecuación canónica?
250. E5: $(y + 5)^2 = 16\,(x + 2)$
251. INV: en la actividad tres, ¿cómo llegaste a la representación gráfica de la parábola dada su ecuación canónica?
252. E5: iniciando me pedían ubicar diferentes puntos como el vértice, el foco, la directriz y el lado recto; inicie hallando el vértice, ya que desde allí, es donde parte la parábola, me daban la ecuación canónica y tome los valores entre los paréntesis

cambiándole de signo, me daba como vértice $(-3, 2)$, a este punto lo nombre como (h, k), de ahí pude hallar la directriz que es la distancia entre el vértice y el foco, y va a ser la misma distancia entre el vértice y la directriz; también halle el lado recto que es igual a $4p$, pero me daba que el lado recto -4, es decir despeje y me dió igual a -1; desde allí pude determinar la distancia desde la directriz, vértice y foco.

253. INV: ¿por qué decidiste que la parábola abría hacia abajo y no hacia arriba?

254. E5: porque al usar la ecuación $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, determine que el -4 que me daban estaba negativo y así supe que al remplazar en la fórmula de x abría hacia arriba o hacia abajo y con el negativo supe que abría hacia abajo.

255. INV: ¿Cómo determinaste p?

256. E5: El lado recto es igual a p, y me daban el número -4, lo remplace y me quedo $\frac{-4}{4}$, y esto es igual a -1.

257. INV: en la actividad 4, ¿cómo hizo para describir el lugar geométrico a partir de la ecuación general?

258. E5: determine la ecuación canónica de la misma manera que en el punto dos, despeje halle el trinomio y determine el vértice de la misma manera en el punto anterior, cambiándole el signo a los números entre paréntesis que acompañaban a las y y a las x.

259. INV: ¿qué obtuviste como ecuación canónica?

260. E5: $(y - 3)^2 = 12(x + 2)$

261. INV: ¿no terminaste?

262. E5: no

263. INV: ¿por qué razón?

264. E5: porque no termine el punto anterior y no recordaba como determinar los puntos que me pedían

265. INV: en la actividad 5, a partir de la gráfica, ¿cómo determinaste los elementos de la parábola?

266. E5: saque los datos que me daban, entonces saque el punto de la directriz, del vértice y del foco, determine primero la ecuación canónica y luego a partir de esta ecuación, determine la ecuación general que me dio $x^2 - 2x - 8y - 2 = 0$. Luego para determinar p, saque la recta igual a p, y esto es igual a 8, lo despeje $\frac{8}{4}$ y me dio $p = 2$. Para hallar la directriz use $-p$ debido a la formula y me quedo $y = 4 - 2$, con directriz igual a 2. El lado recto igual a 8.

267. INV: en la actividad 6, ¿cuál fue el proceso que realizo para encontrar la ecuación general?

268. E5: me daban el vértice y el foco, entonces a partir de esto determiné la ecuación canónica y luego desarrollando la ecuación canónica, pude hallar la ecuación general. La ecuación canónica me dio $(x + 4)^2 = 12y - 36$, desarrollándola como binomio al cuadrado, trinomio, al cuadrado perfecto, determine la ecuación general que es $x^2 - 2x - 16y + 60 = 0$

269. INV: ¿cómo determinaste que esa era la ecuación canónica?

270. E5: porque utilice la formula $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, y remplace los valores porque nombre al vértice con los puntos (h, k) y lo remplace y despeje.

271. INV: ¿cómo determinaste p?

272. E5: no lo termine

273. INV: en la actividad 7, ¿cómo se determinan los elementos de la parábola dada su ecuación general?

274. E5: tome la ecuación que me daban y para empezar a desarrollar separe x a un lado y y a otro lado, también con el mismo orden de primero los cuadrados y luego los que no tienen cuadrado, luego puse el número que está acompañando la primera y^2, hice factor común me dio un numero fraccionario en el lado de las y, como también debo pasar el mismo número para completar el trinomio si lo pongo a un lado lo debo poner en el otro, hice lo mismo y quedo acompañando a las x, opere, dividí $\frac{48x}{4}$, así los puse sobre 4 porque era el denominador. Los opere, saque la ecuación canónica y determine el vértice para graficar

275. INV: ¿cómo decidiste que era una parábola que abría hacia arriba?

276. E5: porque tome los puntos del vértice y lo ubique, halle también p, que es 3, entonces empecé como a contar de cierta manera y porque el valor que esta antes de $x + 2$, es el que determina si es positivo o negativo; determina hacia donde abre es positivo, entonces sé que abre hacia arriba y como está la ecuación dada en positivo abre hacia arriba

277. INV: ¿cómo obtuviste la ecuación de la directriz?

278. E5: contando porque si es la misma distancia entre la directriz y el foco y la distancia me dio 3, entonces sabiendo que esta es la distancia entre vértice y foco, conté la misma desde el vértice hacia donde queda la directriz

279. INV: ¿qué te dio como ecuación de la directriz? E5:

280. E5: $x = 4{,}5$

281. INV: en la actividad 8, ¿cómo realizó la representación gráfica de la parábola a partir de las condiciones dadas?

282. E5: dibujé el plano cartesiano y allí empecé a ubicar los puntos que me daba como el vértice y el foco, una vez teniendo esto y la ecuación de la directriz como $x = 0$, tenía desde donde abría la parábola, es decir desde el vértice la ubicación del foco y la distancia entre el foco y el vértice, vértice y directriz. También me daban el lado recto que era 8 unidades, es decir empecé a contar, yo sé que el lado recto está ubicado entre el foco y los puntos de la parábola, entonces a contar entre el foco y el punto de donde se termina el lado recto y de esta manera realice la gráfica.

283. INV: ¿qué obtuviste como ecuación de la directriz?

284. E5: $x = 0$

285. INV: en el punto 10, ¿cuál fue el proceso que hiciste para poder solucionar el problema?

286. E5: tome la ecuación que me daban, la despeje y halle la ecuación canónica, además me piden el alcance horizontal y yo sé que el alcance horizontal, si dibujo una parábola en el plano cartesiano, esta parábola me va a quedar dividida por la mitad, entonces el alcance horizontal es la suma entre esas dos mitades y por la ecuación canónica me dio 5, entonces el alcance horizontal en total seria 10 metros y yo sé que la altura máxima es el punto más alto al que puede llegar la parábola y este también por la ecuación canónica me dio 4 metros.

287. INV: ¿cómo decidiste que era una ecuación de la parábola?

288. E5: porque me dice que el enunciado que la trayectoria que describe una pelota de golf al ser lanzada, entonces yo supuse que al ver el movimiento de la pelota de golf es parabólico, es decir está describiendo este trayecto es una parábola.

7.6.6 ENT E6

289. INV: en la primera actividad decía: describa el lugar geométrico parábola, ¿tú qué argumentaste al respecto?

290. E6: la parábola es un espacio geométrico donde los puntos en un plano tienen x distancia o están respecto a una misma distancia de un punto fijo que se llama foco y una recta que se llama directriz

291. INV: ¿y eso qué significa?

292. E6: significa que cuando tú trazas un punto en esta parábola vas a ser la misma distancia del punto que trazaste al foco y del punto trazado a la directriz

293. INV: En la actividad dos, ¿cuál fue el proceso realizado para transformar la ecuación canónica a la ecuación general?

294. E6: entonces lo que yo hice fue tomar la ecuación general, luego comencé a tomar los datos para lograr hacer la factorización; los datos que estaban en y, los deje al lado izquierdo, los datos de x al lado derecho, el dato que me salió de la factorización que era $+25$ tuve que sumarlo a los dos lados, después ya como tal era factorizar que quedara elevado a la dos, entonces sacar raíz del primero, raíz del segundo y raíz del tercero y elevar a la 2 y en el otro lado lo que hice fue sacar factor común y de esta forma logré hallar la ecuación general de la parábola y transformarla a la canónica.

295. INV: ¿qué obtuviste como ecuación canónica?

296. E6: $(y+5)^2 = 16\ (x+1)$

297. INV: en la actividad tres, ¿cómo llegaste a la representación gráfica de la parábola dada su ecuación canónica?

298. E6: bueno, entonces lo primero que tuve que hacer fue encontrar el vértice y como ya había aprendido miraba el dato que estaba en x y el dato que estaba en y, lo otro que tenía que hacer, era cambiar el signo para poder realizar la gráfica, luego de esto hallaba el dato que era p, para lograr hallar el foco y la directriz, porque sabemos que la distancia que hay del vértice al foco, es la misma que hay del foco a la directriz, entonces esto me permitió hallar el foco y la directriz y ya con esto, fue posible graficarla parábola.

299. INV: ¿por qué decidiste que la parábola abría hacia abajo?

300. E6: porque bueno, primero tenía que ver el vértice, ubique el vértice, después ya hemos aprendido que dependiendo de la ecuación dada que, si era x o y, abría hacia arriba o hacia abajo, hacia la derecha o hacia la izquierda, y porque p, en este caso, era -4, entonces eso me indicaba que abría hacia abajo

301. INV: tú dices que la ecuación de la directriz es $y = 3$, ¿por qué razón?

302. E6: bueno lo primero que yo hice fue basándome en el vértice, mirar cual era p, entonces p era 1, si yo sabía que la parábola abría hacia abajo tenía que contar 1 hacia arriba para poder trazar la directriz y para poder hallar la ecuación, entonces yo veía por donde cortaba, entonces cortaba en el eje y en el 3; así halle su ecuación.

303. INV: en la actividad 4 cuatro, ¿cómo hizo para describir el lugar geométrico a partir de la ecuación?

304. E6: bueno, entonces tome la ecuación y la transforme en canónica para poder halle el vértice, el foco y la directriz, entonces ya con estos datos pude definir que la parábola, abría hacia la derecha, además teniendo en cuenta la información que nos habían dado antes de la ecuación, en que forma abre hacia la derecha, izquierda, arriba o hacia abajo y tomando en cuenta lo que era p.

305. INV: ¿qué describiste sobre ese lugar geométrico?

306. E6: bueno yo dije que el lugar geométrico representaba era una parábola, caracterizada por los puntos (x, y), en el plano, x está en un punto fijo F llamado foco y de una recta fija del mismo plano llamado directriz
307. INV: en la actividad 5 a partir de la gráfica, ¿cómo determinaste los elementos de la parábola?
308. E6: primero ubique el vértice, después el foco y la ecuación de la directriz, luego teniendo en cuenta esto, halle p, que era simplemente encontrar la distancia que había del vértice a la directriz o del vértice al foco; luego teniendo en cuenta hacia donde abre la parábola, establecí la ecuación y ya solamente tenía que remplazar los datos, y de esta forma pude hallarla.
309. INV: ¿cómo te quedo la ecuación de la directriz?
310. E6: $y = 6$
311. INV: en la actividad 6, ¿cuál fue el proceso que realizó para encontrar la ecuación general?
312. E6: lo primero que hice fue establecer la ecuación, con base en esto remplace lo que era el vértice y pues ya conociendo la distancia del vértice al foco, pude remplazar p, lo único que tuve que hacer fue es desarrollar esto con las respectivas factorizaciones y después los datos que se encontraban a la derecha que eran los datos en x y el número que estaba solo lo pase a restar al otro lado y lo iguale a cero y esto lo simplifique
313. INV: ¿cómo llegaste a definir que p era 3?
314. E6: porque me ubique en el vértice, ubique el vértice y el foco y encontré la distancia que había entre estos y esta era p.
315. INV: ¿qué obtuviste como ecuación general?
316. E6: $y^2 - 6y - 12x - 39 = 0$
317. INV: ¿y eso qué indica?
318. E6: quiere decir que es una parábola que abre hacia la derecha, teniendo en cuenta la forma como está establecida la ecuación y también que p es positivo.
319. INV: en la actividad 7, ¿cómo se determinan los elementos de la parábola dada su ecuación general?
320. E6: primero se toma la ecuación y la pase a la canónica, y ya teniendo en cuenta esto, bueno lo que tuve que hacer fue un procedimiento más largo porque y^2 estaba acompañada de un 4, entonces después de esto comencé a factorizar, pase el 4 que está multiplicando a dividir, y ya al desarrollar esto, logre encontrar el vértice y por ende el foco, p y los otros datos.
321. INV: en la actividad 8, ¿cómo realizó la representación gráfica de la parábola, a partir de las condiciones dadas?
322. E6: primero se trazó el plano, ubicar el vértice y el foco y ya teniendo en cuenta esto sabia para que lado abría la parábola, también nos daban lo que era la ecuación de la directriz, entonces solo era necesario trazarla y tener en cuenta el lado recto que nos estaban dando
323. INV: ¿cómo decidiste que la ecuación de la directriz estaba el eje Y?
324. E6: porque decía que $x = 0$ y además por la ubicación que tenía el vértice y el foco, entonces era obvio que la directriz debía ir en este sentido
325. INV: ¿por qué no ubicaste que la parábola abriera hacia la izquierda?

326. E6: porque ya habíamos aprendido que el vértice debía ir adentro de la parábola, el foco debe ir dentro de la parábola o debe ir dentro del vértice, entonces por ende decidí que la parábola abre hacia la derecha.
327. INV: en la actividad 9, consistía que a partir de la gráfica describa cuales son los elementos de la parábola y cuáles son sus coordenadas y ecuaciones, ¿cuál fue el proceso que hiciste?
328. E6: primero identifique los datos que se podían deducir que eran vértice, el foco, p y el lado recto, con base en esto utilizo la ecuación que planteaba si la parábola abría hacia la derecha o hacia la izquierda; tuve en cuenta que si abría hacia la izquierda y lo que hice fue, lo que fue la ecuación canónica remplazar simplemente los datos que eran vértice y p, y en la ecuación general utilizar la misma canónica pero entonces igualarlas a cero
329. INV: ¿cómo obtuviste la ecuación?
330. E6: la canónica $(y-1)^2 = 8(x-6)$ y la general, después de haber hecho el procedimiento $y^2 - 8x + 49 = 0$
331. INV: ¿qué significa la longitud del lado recto?
332. E6: es 4 veces p o 4 veces la distancia que hay del foco al vértice o del vértice hacia la directriz
333. INV: en la actividad 10, ¿cuál fue el proceso que hiciste para poder solucionar el problema?
334. E6: primero tomar la expresión o la ecuación que ya nos daban, después decía que tocaba hallar la altura máxima y el alcance horizontal, entonces yo deduje que la altura máxima era y y el alcance horizontal era x, luego transforme esta ecuación en la canónica y de esta forma podía hallar el dato en x y el dato en y.
335. INV: ¿por qué asociaste la ecuación que te daban en este problema como la ecuación la ecuación de una parábola?
336. E6: porque decía que era la trayectoria que describe una pelota de golf al ser lanzada, entonces yo supuse que la trayectoria que iba a realizar era en forma de una parábola
337. INV: ¿qué obtuviste como alcance horizontal y altura máxima?
338. E6: x, es decir alcance horizontal 5 y la altura o $y = 4$
339. INV: ¿Por qué el alcance horizontal es 5?
340. E6: pensándolo bien seria 10 porque cinco solo sería la mitad.

8.7 Anexo 7. Autorización

Tunja, 01 octubre de 2018

Señora

Dolly Acevedo Vargas

Coordinadora Académica

Colegio De La Presentación Tunja

Cordial saludo,

Por medio de la presente me permito solicitar permiso para desarrollar el proyecto de investigación titulado "**La comprensión de la parábola a través de las representaciones semióticas**", cuyo objetivo principal es "**establecer niveles de comprensión del objeto matemático parábola a través del análisis de representaciones semióticas, tratamientos y conversiones"**. Este proyecto estará bajo la dirección del Dr. Zagalo Enrique Suarez Aguilar y se desarrollará en el grado décimo de la Institución Educativa.

Gracias por la atención prestada.

Atentamente,
LUIS EDUARDO SÁNCHEZ ESPINEL
Estudiante de Maestría en Educación Matemática.
UPTC, Tunja

VoBo.
Dra. ZAGALO ENRIQUE SUAREZ AGUILAR
Docente Titular
Escuela de Matemáticas y Estadística.

8.8 Anexo 8. Consentimiento

Yo,________________________________ en calidad de acudiente de ___________________________________ del grado décimo de la Institución Educativa Colegio De La Presentación de Tunja, autorizo a los investigadores, doctor Zagalo Enrique Suarez Aguilar y al profesor Luis Eduardo Sánchez Espinel para publicar y divulgar por medios electrónicos o impresos, textos sobre actividades realizadas en el proceso de investigación, encaminada a establecer niveles de comprensión del objeto matemático parábola a través del análisis de representaciones semióticas, tratamientos y conversiones. Este proceso será objeto de investigación en el año 2018.

Tunja, ____ de ____________ del 2018

Firma del acudiente

____